УДК 336.767: 519.865

А.В.Смирнов, асп.
Учебно-научный комплекс "Институт прикладного системного анализа", НТУУ «КПИ», г. Киев

Сравнительный анализ метода выбора альтернатив на основе нечёткого отношения предпочтений с методом анализа иерархий на примере выбора оптимального инвестиционного портфеля

В данной статье приведены методы выбора оптимального инвестиционного кластера из заданного множества, в которых построены оптимальные инвестиционные портфели. Проведен сравнительный анализ метода выбора альтернатив на основе нечёткого отношения предпочтений и метода анализа иерархий (МАИ) для нахождения наилучшего кластера. Для двух методов были предложены сравнительные критерии альтернатив по риску, доходности и цене портфеля.
кластер, инвестиционный портфель, доходность, альтернатива, критерий

В нынешней экономике, для анализа рынка ценных бумаг разработано множество методов по оптимизации инвестиционных портфелей, основанных как на винеровской теории [1], так и на нечётко-множественном подходе [2]. Целью данных методов является нахождение из множества ценных бумаг такого оптимального подмножества, которое бы могло удовлетворить заданным критериям пары доходность-риск. Однако при построении портфеля в данных случаях аналитик может запросто пропустить альтернативный вариант оптимального портфеля с другой группой ценных бумаг.

На основании данных методов разработано множество систем поддержки принятий решений, принимающих на входе критерии по доходности и отклонению каждой ценной бумаги и предоставляющих на выходе уже построенный портфель. Одна из таких программ SmartFolio - базируется на винеровских методах, разработанная Modern Investment Technologies [8]. Программы которые базируются на нечётко-множественном подходе были разработаны Есфандиярфард Малихех(описана в кандидатской работе автора [3]), другая реализована компанией Siemens Business Services, весомый вклад во вторую программу внес, непосредственно д.е.н. А.О. Недосекин [4]. В своих работах он описал применение нечётко-множественных методов в инвестиционном менеджменте. В работах В.Л. Плескача и Ю.В Рогушина было рассмотрено применение метода анализа иерархий для сравнения и выбора систем электронного бизнеса [5], однако ни в работах авторов, ни в программном обеспечении не был предусмотрен выбор лучшей альтернативы для инвестиционных портфелей. В нашей статье мы рассмотрим применение метода анализа иерархий и метода выбора альтернатив для определения оптимального кластера.

Построение оптимального портфеля не является последним звеном задачи. Необходимо также провести сравнительный анализ данного портфеля с альтернативными вариантами. После проведения анализа существующих данных и разбивки ценных бумаг на группы, одинаковым по свойствам и тенденциям методом k-средних или же α-квазиэквивалентности, можно построить оптимальные инвестиционные портфели на каждом кластере [6]. Заключительным этапом является непосредственно выбор оптимального кластера. Мы же рассмотрим два метода по определению оптимального кластера из множества существующих: метод выбора альтернатив на основе нечёткого отношения предпочтений, или метод анализа иерархий.

Составляя инвестиционные портфели с применением нечётко-множественного подхода, на выходе получаем доходность k-го портфеля, также в виде нечеткого числа r=$(r_{\min};\bar{r};r_{\max})$. Для принятия решения по выбору лучшей альтернативы (выбор лучшего кластера) вводится нечёткое отношение предпочтений. [7]

Для определения в конечном итоге оптимального кластера, критерии будем определять на доходности, риске и цене портфеля.

Введём на множестве альтернатив X (множество кластеров с оптимальными инвестиционными портфелями) следующие оценочные критерии: $R_r^{\beta\max}$ – ожидаемая доходность ($\bar{r}$) портфеля при максимальном уровне риска β; $R_{r\min}^{\beta\max}$ – нижняя граница доходности ($r_{\min}$) портфеля при максимальном уровне риска β; $R_{r\max}^{\beta\max}$ – верхняя граница доходности ($r_{\max}$) портфеля при максимальном уровне риска β; $R_D^{\beta\max}$ – стоимость портфеля (D), при максимальном уровне риска β, $R_\beta^{\beta\max}$ – максимальный риск портфеля. Стоимость рассчитывается следующим образом:

$$D_k = \sum_{i=1}^{n} C_{ik} x_{ik}, \quad (1)$$

где C_{ik} цена i-той ценной бумаги в портфеле k;

x_{ik} – доля i-той бумаги в портфеле k.

Такие же критерии введем для минимального риска портфелей ($R_r^{\beta\min}, R_{r\min}^{\beta\min}, R_{r\max}^{\beta\min}, R_D^{\beta\min}, R_\beta^{\beta\min}$)

По оценкам эксперта, по вышеперечисленным критериям составляются такие отношения предпочтения на множестве альтернатив:

$R_r^{\beta\max}$: $x_i \prec x_j$, если ожидаемая доходность от i-го портфеля будет меньше доходности j-го портфеля ($r_i < r_j$), при максимальном для портфелей уровне риска β_{max}, если же $r_i = r_j$, то $x_i \approx x_j$. Для критериев $R_r^{\beta\min}, R_{r\min}^{\beta\min}, R_{r\max}^{\beta\min}, R_{r\min}^{\beta\max}, R_{r\max}^{\beta\max}$ отношения предпочтения берутся аналогично.

$R_D^{\beta\max}$: $x_i \prec x_j$, если стоимость i-го портфеля будет больше стоимости j-го портфеля ($D_i > D_j$), при максимальном для портфелей уровне риска β_{max}. В случае если $D_i = D_j$, то $x_i \approx x_j$. Для критерия $R_D^{\beta\min}$ отношения предпочтения берутся аналогично.

$R_\beta^{\beta\max}$: $x_i \prec x_j$, если риск i-го портфеля будет больше риска j-го портфеля ($\beta_i > \beta_j$), В случае если $\beta_i = \beta_j$, то $x_i \approx x_j$. Для критерия $R_\beta^{\beta\min}$ отношения предпочтения берутся аналогично.

В итоге на входе получаем 12 отношений предпочтений. Матрицы отношения для критериев строятся, исходя из следующего соотношения:

$$\mu_R(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, если\_x_i \succ x_j, или\_x_i \approx x_j \\ 0, если\_x_i \approx x_j \end{cases} \quad (2)$$

Вес критериев: $\omega_{r}^{\beta\min},\omega_{r\min}^{\beta\min},\omega_{r\max}^{\beta\min},\omega_{D}^{\beta\min},\omega_{\beta}^{\beta\min},\omega_{r}^{\beta\max},\omega_{r\min}^{\beta\max},\omega_{r\max}^{\beta\max},\omega_{D}^{\beta\max},\omega_{\beta}^{\beta\max}$ расставляется экспертами. Оптимальный кластер выбирается алгоритмом выбора альтернатив при наличии множества критериев оптимальности [8].

Рассмотрим выбор оптимального кластера на примере полученных двух:

В первый кластер попали акции Google, XEROX, Intel Corp, Computer Sciences Corp, Lexmark International (далее GOG, XER, INT, CSC, LEX). Во второй кластер попали Apple, IBM, Cisco, Nvidia, YAHOO (далее APL, CSO, IBM, NVDA, YAH).

Оптимальные портфели на исходных данных кластерах были получены нечётко-множественным методом, где доходность рассматривалась в виде нечеткого числа с колоколообразной функцией принадлежности, результаты приведены в табл.1.

Таблица 1 - Структура оптимальных инвестиционных портфелей по кластерам

№ кластера	Структура портфеля	Риск	Доходность портфеля	Нижняя граница доходности	Верхняя граница доходности	Цена портфеля
1(β_{max})	{GOG, INT}	0,476	0,511	-3,98	1,402	596
2(β_{max})	{APL, NVDA}	0,43	0,4833	-3,4944	1,602	15,41
1(β_{min})	{GOG,INT}	0,412	0,435	-3,21	1,12	26,7
2(β_{min})	{APL, NVDA}	0,4086	0,51	-3,05	0,98	404,74

На критерии экспертами были проставлены следующие веса, в случае «осмотрительной» политики компании веса ранжируются следующим образом: риск, ожидаемая доходность, цена портфеля, нижняя граница доходности, верхняя граница доходности и принимают следующие значения:

$\omega_{\beta}^{\beta\min}=0{,}18$; $\omega_{\beta}^{\beta\max}=0{,}13$; $\omega_{r}^{\beta\min}=0{,}17$; $\omega_{r}^{\beta\max}=0{,}12$; $\omega_{D}^{\beta\max}=0{,}10$; $\omega_{D}^{\beta\min}=0{,}07$; $\omega_{r\min}^{\beta\min}=0{,}08$; $\omega_{r\min}^{\beta\min}=0{,}05$; $\omega_{r\max}^{\beta\min}=0{,}06$; $\omega_{r\max}^{\beta\max}=0{,}04$

Матрицы отношений к критериям R строятся по соотношению (2) и имеют следующий вид: (табл. 2)

Таблица 2 - Матрицы отношений к критериям R

$\mu_{R_{\beta}^{\beta\min}}(x_i,x_j)=$	$x_i\backslash x_j$	x_1	x_2	$\mu_{R_{\beta}^{\beta\max}}(x_i,x_j)=$	$x_i\backslash x_j$	x_1	x_2
	x_1	1	0		x_1	1	0
	x_2	1	1		x_2	1	1
$\mu_{R_{r}^{\beta\min}}(x_i,x_j)=$	$x_i\backslash x_j$	x_1	x_2	$\mu_{R_{r}^{\beta\max}}(x_i,x_j)=$	$x_i\backslash x_j$	x_1	x_2
	x_1	1	1		x_1	1	0
	x_2	0	1		x_2	1	1
$\mu_{R_{D}^{\beta\min}}(x_i,x_j)=$	$x_i\backslash x_j$	x_1	x_2	$\mu_{R_{D}^{\beta\max}}(x_i,x_j)=$	$x_i\backslash x_j$	x_1	x_2
	x_1	1	1		x_1	1	0
	x_2	0	1		x_2	1	1
$\mu_{R_{r\min}^{\beta\min}}(x_i,x_j)=$	$x_i\backslash x_j$	x_1	x_2	$\mu_{R_{r\min}^{\beta\max}}(x_i,x_j)=$	$x_i\backslash x_j$	x_1	x_2
	x_1	1	0		x_1	1	0
	x_2	1	1		x_2	1	1
$\mu_{R_{rmqx}^{\beta\min}}(x_i,x_j)=$	$x_i\backslash x_j$	x_1	x_2	$\mu_{R_{r\max}^{\beta\max}}(x_i,x_j)=$	$x_i\backslash x_j$	x_1	x_2
	x_1	1	1		x_1	1	0
	x_2	0	1		x_2	1	1

Если построить отношение строгого предпочтения и найти множество недоминирующих альтернатив, которое будет равняться $\mu_{Q1}^{нд}(x_i, x_j) = (1{,}1)$, делаем вывод, что альтернативы x_1 и x_2 – чётко недоминирующие.

Построим нечеткое отношение предпочтения:

$$Q_2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j f_j(x) \tag{3}$$

в нашем случае n=10. И найдём её функцию принадлежности:

$$\mu_{Q_2}(x_i, x_j) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \mu_{R_k}(x_i, x_j) \tag{4}$$

Матрица отношения предпочтений будет иметь вид, представленный в табл.3, а матрица отношения Q_2^s будет иметь вид, представленный в табл.4

Таблица 3 – Матрица нечеткого отношения предпочтений Q_2:

$\mu_{Q_w}(x_i, x_j) =$	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2
	x_1	1	0,33
	x_2	0,67	1

Таблица 4 – Матрица отношения Q_2^s:

$\mu_{Q_{2\,w}}^{s}(x_i, x_j) =$	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2
	x_1	0	0
	x_2	0,34	0

Множество недоминированных альтернатив по отношению Q_2, будет: $\mu_{Q_2}^{нд}(x_i, x_j) = (0{,}66;1)$

Находим пересечение множеств $Q_1^{нд}, Q_2^{нд}$ и рассчитаем функцию принадлежности результирующего подмножества $Q_{нд} = Q_1^{нд} \cap Q_2^{нд}$: $\mu_Q^{нд}(x_i, x_j) = (0{,}66;1)$, таким образом, наилучшей альтернативой является выбор второго кластера.

Рассмотрим выбор лучшей альтернативы методом анализа иерархий (МАИ) [6], который состоит в декомпозиции проблемы на все более простые составляющие части и дальнейшей обработке последовательности суждений ЛПР, по парным сравнениям. В результате может быть выражена относительная степень взаимодействия элементов в иерархии. Эти суждения затем выражаются численно. Метод включает процедуры синтеза множественных суждений, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений.

На первом этапе выявляются наиболее важные элементы проблемы, на втором — наилучший способ проверки наблюдений и оценки элементов; следующим этапом может быть разработка способа применения решения и оценка его качества.

Иерархия строится от вершины (цели — с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, от которых зависят последующие уровни) к самому низкому уровню, который обычно является перечнем альтернатив. Иерархия считается полной, если каждый элемент заданного уровня функционирует как критерий для всех элементов нижестоящего уровня. В противном случае, иерархия — неполная.

В МАИ элементы задачи ЛПР сравнивает попарно по отношению к их воздействию на общую для них характеристику.

Построим иерархию критериев оценки инвестиционных портфелей. На верхнем уровне иерархии находится цель – выбор оптимального кластера. На втором уровне находятся уточняющие критерии, по которым будем проводить сравнение. В качестве примера рассмотрим критерии, которые использовали в прошлом методе. На третьем уровне иерархии находятся найденные портфели на кластерах А и Б.

Закон иерархической непрерывности требует, чтобы элементы верхнего уровня иерархии были сравнимы попарно по отношению к элементам следующего уровня и т.д. вплоть до вершины иерархии. Например, надо получить имеющие смысл ответы на вопросы типа: «Насколько портфель в кластере А лучше портфеля в кластере Б по критерию риска?»

Для проведения субъективных парных сравнений используется шкала относительной важности элементов по отношению к общей цели (табл.5).

Таблица 5 - Шкала относительной важности

Относит. важность	Определение
1	Равная важность
3	Умеренное превосходство одного над другим
5	Существенное или сильное превосходство
7	Значительное превосходство
9	Очень сильное превосходство
2, 4, 6, 8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями
Обратные величины	Если при сравнении А и Б получено одно из вышеуказанных чисел x, то при сравнении Б и А получена обратная величина 1/x

Необходимо построить обратно-симметричную (т.е. $a_{ij} = 1/a_{ji}$) матрицу попарных сравнений. Матрица попарных сравнений для второго уровня задачи выбора оптимального кластера (табл.6) имеет размерность 10 (по количеству критериев).

Таблица 6 - Матрица попарных сравнений для второго уровня задачи выбора оптимального кластера

	$R_\beta^{\beta\min}$	$R_\beta^{\beta\max}$	$R_r^{\beta\min}$	$R_r^{\beta\max}$	$R_D^{\beta\min}$	$R_D^{\beta\max}$	$R_{r\min}^{\beta\min}$	$R_{r\min}^{\beta\max}$	$R_{r\max}^{\beta\min}$	$R_{r\max}^{\beta\max}$
$R_\beta^{\beta\min}$	1	2	3	3	3	5	5	7	5	6
$R_\beta^{\beta\max}$	½	1	2	3	5	3	6	6	7	5
$R_r^{\beta\min}$	1/3	½	1	1/3	5	7	7	8	7	8
$R_r^{\beta\max}$	1/3	1/3	3	1	7	5	8	7	8	7
$R_D^{\beta\min}$	1/3	1/5	1/5	1/7	1	1/3	5	4	5	4
$R_D^{\beta\max}$	1/5	1/3	1/7	1/5	3	1	4	5	4	5
$R_{r\min}^{\beta\min}$	1/5	1/6	1/7	1/8	1/5	1/4	1	1/3	5	6
$R_{r\min}^{\beta\max}$	1/7	1/6	1/8	1/7	¼	1/5	3	1	6	5
$R_{r\max}^{\beta\min}$	1/5	1/7	1/7	1/8	1/5	¼	1/5	1/6	1	4
$R_{r\max}^{\beta\max}$	1/6	1/5	1/8	1/7	¼	1/5	1/6	1/5	1/4	1

Матрицы попарных сравнений для третьего уровня задачи выбора оптимального кластера (табл.7) имеют размерность 2.

Для группы матриц парных сравнений формируются наборы локальных приоритетов, которые выражают их относительное влияние на элементы более высокого уровня. (табл.8) Локальные приоритеты критериев L_i определяются как:

$$L_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_{ij}} \quad (5).$$

Таблица 7 - Матрицы попарных сравнений для третьего уровня задачи выбора оптимального кластера

$R_{\beta}^{\beta\min}$	$x_i \backslash x_j$	x1	x2	$R_{\beta}^{\beta\max}$	$x_i \backslash x_j$	x1	x2	$R_{r}^{\beta\min}$	$x_i \backslash x_j$	x1	x2
	x1	1	1/2		x1	1	1/4		x1	1	1/5
	x2	2	1		x2	4	1		x2	5	1
$R_{r}^{\beta\max}$	$x_i \backslash x_j$	x1	x2	$R_{D}^{\beta\min}$	$x_i \backslash x_j$	x1	x2	$R_{D}^{\beta\max}$	$x_i \backslash x_j$	x1	x2
	x1	1	4		x1	1	9		x1	1	1/8
	x2	1/4	1		x2	1/9	1		x2	8	1
$R_{r\min}^{\beta\min}$	$x_i \backslash x_j$	x1	x2	$R_{r\min}^{\beta\max}$	$x_i \backslash x_j$	x1	x2	$R_{r\max}^{\beta\min}$	$x_i \backslash x_j$	x1	x2
	x1	1	1/3		x1	1	1/6		x1	1	5
	x2	3	1		x2	6	1		x2	1/5	1
$R_{r\max}^{\beta\max}$	$x_i \backslash x_j$	x1	x2								
	x1	1	1/4								
	x2	4	1								

Таблица 8 – Локальные приоритеты критериев

L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10
3,51	2,98	2,39	2,86	0,87	1,09	0,44	0,53	0,28	0,22

В нашем случае n=10. Локальный приоритет минимального риска $R_{\beta}^{\beta\min} : L_1 = \sqrt[10]{1*2*3*3*3*5*5*7*5*6} = 3{,}51$

После того как компоненты собственного вектора получены для всех десяти строк, становится возможным их использование для дальнейших вычислений. Нормализуем их для оценки вектора приоритетов по формуле:

$$\|L_i\| = \frac{L_i}{\sum_{j=1}^{n} L_j}, \quad (6).$$

$\sum_{j=1}^{n} L_j = 15{,}17$. Соответственно находим оценки для всех десяти параметров оценки магазинов: ||L1||=0,23, ||L2||=0,2, ||L3||= 0,16, ||L4||=0,19, ||L5||=0,06, ||L6||=0,07, ||L7||=0,03, ||L8||= 0,03, ||L9||=0,02 ||L10||=0,01

Затем аналогичные действия выполняем для 10 матриц парных сравнений третьего уровня, каждая из которых соответствует одному из параметров (табл.8) и представлены в табл.9.

Таблица 9 - Нормированные оценки кластеров А и Б

	$R_{\beta}^{\beta\min}$	$R_{\beta}^{\beta\max}$	$R_{r}^{\beta\min}$	$R_{r}^{\beta\max}$	$R_{D}^{\beta\min}$	$R_{D}^{\beta\max}$	$R_{r\min}^{\beta\min}$	$R_{r\min}^{\beta\max}$	$R_{r\max}^{\beta\min}$	$R_{r\max}^{\beta\max}$

Оценка А	0,33	0,2	0,17	0,8	0,9	0,11	0,25	0,14	0,83	0,2
Оценка Б	0,67	0,8	0,83	0,2	0,1	0,89	0,75	0,86	0,17	0,8

Теперь можно построить глобальные приоритеты для решаемой задачи согласно следующей формулы:

$$G_A = \sum_{i=1}^{n} \|L_i\| * \|L_{iA}\|, \quad G_Б = \sum_{i=1}^{n} \|L_i\| * \|L_{iБ}\|, \qquad (7),$$

где n=10. Обобщённый приоритет G_A=0,38 ; G_B= 0,62. Таким образом получаем, что выбор кластера Б предпочтительнее нежели выбор кластера А.

Два рассмотренных метода использовали одинаковые критерии оценки альтернатив, по доходности, риску и цене портфелей. В результате полученный ответ методом анализа иерархий идентичный методу выбора альтернатив на основе нечёткого отношения предпочтений. Несмотря на более сложную структуру, метод анализа иерархий имеет более взвешенную оценку при выборе лучшей альтернативы, ведь взвешиваются не только критерии оценки но и параметры в данных критериях. Данные методы помогают лицу, принимающему решение, выбрать предпочтительную группу акций среди нескольких (разбитие на кластеры проходит на первом этапе оптимизации инвестиционного портфеля). Этап выбора альтернативы является заключительным шагом выбора оптимального портфеля и является весомой частью в построении системы поддержки принятий решений.

Список литературы

1. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Дж.В. Инвестиции. М.:Инфра-М,1997.
2. Недосекин А.О. Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций. С.-П., 2002.
3. Есфандиярфард Малихех. Оптимизация инвестиционного портфеля в условиях неопределенности с использованием прогнозирования : дисс. ... канд. техн. наук. : 01.05.04 – системный анализ и теория оптимальных решений / Есфандиярфард Малихех. - К., 2011. - 151 л. + CD-ROM.
4. Недосекин А.О. Система оптимизации фондового портфеля от Сименс Бизнес Сервисез // Банковскиетехнологии. – 2003.
5. Рогушина Ю.В., Плескач В.Л. (2004) Применение метода анализа иерархий для сравнения и выбора систем электронного бизнеса. Вісник Київського національного університету ім.Т.Шевченко. Серія "Фізико-математичні науки" . pp. 156-163.
6. Смирнов А.В. Разбиение ценных бумаг на группы с одинаковыми признаками методами α - квазиэквивалентности, а также нечётких k- средних. Проблеми підвищення ефективності інфраструктури. Збірник наукових праць: Випуск 27.- Київ: НАУ, 2010.– С. 87 - 94.
7. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. – К.:Видавничий дім «Слово», 2006, С. 602-619.
8. Саати Т., Керне К. Аналитическое планирование. Организация систем. - М.: Радио и связь, 1991. - 224 с. http://www.smartfolio.com/ .

А. Смирнов

Порівняльний аналіз методу вибору альтернатив на основі нечіткого відношення переваг з методом аналізу ієрархій на прикладі вибору оптимального інвестиційного портфеля

У даній статті наведені методи вибору оптимального інвестиційного кластера з заданої множини, в яких побудовані оптимальні інвестиційні портфелі. Проведено порівняльний аналіз методу вибору альтернатив на основі нечіткого відношення переваг і методу аналізу ієрархій (МАІ) для знаходження найкращого кластера. Для двох методів були запропоновані порівняльні критерії альтернатив по ризику, прибутковості і ціні портфеля.

A. Smirnov

Comparative analysis of the method of choice alternatives based on fuzzy preference relations with the method of hierarchy analysis on the example of choosing the optimal portfolio

This article describes methods for selecting the optimal investment cluster from the given set, and which constructed the optimal portfolios. A comparative analysis of the method of choice alternatives, based on fuzzy preference relations and the analytic hierarchy process (AHP) to find the best cluster, which is the optimal investment portfolio. For the two methods have been proposed comparative criteria for alternatives of risk, return and value of the portfolio.

Одержано 13.02.12