

## Сопоставление моделей трения на шине при ее колебаниях

Теоретически изучены поперечная сила трения и восстанавливающий момент, возникающие на шине при ее неустановившемся (колебательном) движении вблизи нулевого угла увода. Приведены к единому виду и сопоставлены между собой, а также с данными экспериментов результаты моделирования, полученные при использовании трех моделей.

**шина, трение, колебания, модель**

**1. Введение.** Несмотря на то, что автомобили, мотоциклы, самолеты являются объектами частого использования, от исправности и безотказности которых зависят жизни людей, многие вопросы математического моделирования их движения нуждаются в уточнениях. Основной трудностью здесь является отсутствие надежного алгоритма нахождения сил и моментов трения на колесе с пневматической шиной при неустановившемся движении. (Далее такое колесо назовем *шиной*). Отметим некоторые работы, где представлены основные, как это представляется, модели и их использование для описания неустановившегося движения шины - [1-7]. В [4] отмечено, что проведение экспериментов по замеру трения на шине при ее колебаниях чрезвычайно дорого. Видимо в первую очередь по этой причине не каждая из теоретических моделей достаточно полно и напрямую сопоставлена с экспериментальными данными. В настоящее время нет четких сведений о границах применимости той или иной модели неустановившегося увода шины.

© Б.М. Шифрин, 2010

В данной работе теоретически изучаются сила и момент сил трения вокруг вертикальной оси при колебаниях шины вблизи основного угла увода равного нулю. Три модели шины, применяемые для изучения колебаний опор шасси и собственно шин - Тхота-Краускопфа-Ловенберга [5,6], Сура-Сурьянараяна [7], Кларка-Доджа-Найбаккена [3,4] - приведены к единой форме и сопоставлены между собой и с экспериментальными данными [3,4]. Модели [5,6] и [3,4] являются развитиями струнной теории шины [8], а модель [7] – модернизированной версией известной модели [11]. В целом полученные в работе результаты направлены на решение вопросов колебаний пневмоколесных машин.

**2. Постановка задачи.** На рис.1 показана катящаяся по ровной опорной плоскости  $O_g X_g Z_g$  шина. Оси  $O_g X_g Y_g Z_g$  - неподвижные; оси  $CXYZ$  - связаны с шиной.  $C$  – центр масс шины;  $C_*$  – центр зоны контакта шины с опорной поверхностью;  $\omega$  – угловая скорость качения. Плоскость диска  $CXY$  всегда перпендикулярна опорной плоскости.

Внешние воздействия такие, что

$$Z = Z(t), \varphi = \varphi(t), \quad (1)$$

где  $Z, \varphi$  – заданные функции поперечного смещения центра масс шины и угла поворота диска колеса;

$t$  – время в секундах.

При

$$Z(t) = const = 0; \varphi(t) = const = 0 \quad (2)$$

точка  $C$  имеет скорость  $\vec{V}$ , которая параллельна оси  $O_g X_g$ :

$$\vec{V} = const.$$

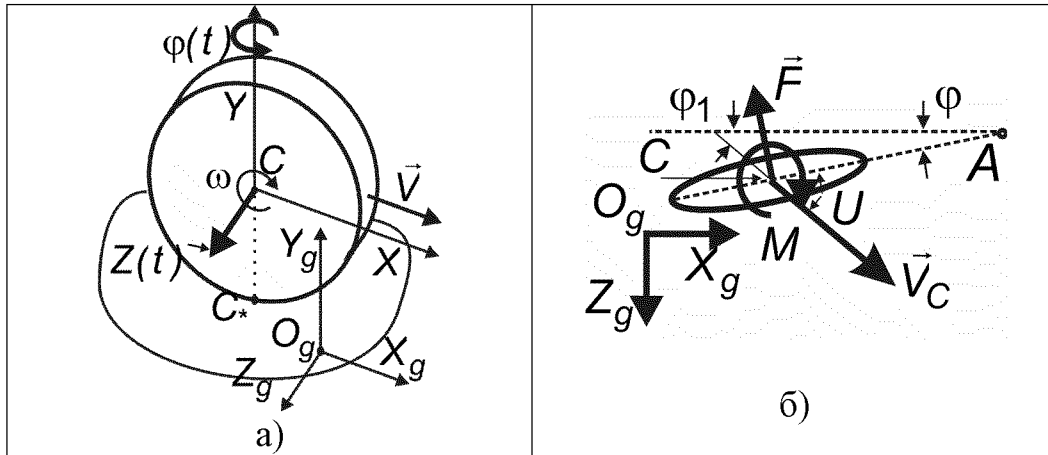


Рисунок 1 - Катящаяся шина

При невыполнении условия (2) шина катится с *уводом*, т.е. катится так, что между проекциями на опорную плоскость вектора скорости точки  $C$  и плоскости диска колеса образуется угол  $U$  (рис. 1б), именуемый *углом увода*:

$$U = \varphi + \varphi_1, \varphi_1 = \arctg(\dot{Z}/V) \approx \dot{Z}/V, \quad (3)$$

где точками сверху обозначаем дифференцирование по времени  $t$ .

В случае установившегося увода:

$$U(t) = const = U_0,$$

в случае неустановившегося увода и, в частности, при колебаниях шины имеем:

$$U \neq const = \tilde{U}(t).$$

Будем изучать колебания шины вблизи основного угла увода равного нулю.

Полагаем, что функции  $Z(t), \varphi(t)$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} Z &= Z_0 \sin \theta_z(t), \\ \varphi &= \varphi_0 \sin \theta_\varphi(t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $Z_0 = const, \theta_z(t)$  – амплитуда и полный фазовый угол поперечного смещения;

$\varphi_0 = const, \theta_\varphi(t)$  – амплитуда и полный фазовый угол угла поворота:

$$\left. \begin{aligned} \theta_z &= \omega_z t, \\ \theta_\varphi &= \omega_\varphi t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $\omega_z = const, \omega_\varphi = const$  – частоты вынужденных колебаний.

При движении с уводом на шину действуют *поперечная сила трения*, направленная вдоль оси  $CZ$ , и момент сил трения вокруг оси  $CY$ , который называют *восстанавливающейм*. (Такое название связано с тем, что он приводит к уменьшению угла увода). Упомянутую силу и момент при установившемся уводе обозначим  $F, M$ , а при неустановившемся –  $\tilde{F}, \tilde{M}$  (рис. 1б).

Выделим два частных случая внешнего нагружения – *поперечное поступательное движение*

$$Z(t) \neq 0, \varphi(t) = 0, \quad (6)$$

и *чистый поворот*:

$$Z(t) = 0, \varphi(t) \neq 0. \quad (7)$$

Силу и момент трения для случая (6) обозначим  $\tilde{F}_z, \tilde{M}_z$ , а для случая (7) -  $\tilde{F}_\varphi, \tilde{M}_\varphi$ . Понятно, что в случае общего нагружения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F} &= \tilde{F}_z + \tilde{F}_\varphi, \\ \tilde{M} &= \tilde{M}_z + \tilde{M}_\varphi \end{aligned} \right\}.$$

Для упрощения полагаем продольное скольжение отсутствующим. Увод без продольного скольжения называют *чистым*.

Своей задачей считаем сопоставление результатов моделирования (а именно, поперечной силы  $\tilde{F}$  и восстанавливающего момента  $\tilde{M}$ ) с экспериментальными данными при использовании разных (выше упомянутых) моделей для случаев гармонических воздействий (6) и (7).

**3. Модель колебаний шины Сура-Сурьянараяна.** В серии работ, направленных на изучение шимми носовой опоры шасси самолета, к примеру [7], авторы при определении  $\tilde{F}, \tilde{M}$  использовали следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F} &= K_\Delta \Delta + C_\Delta \dot{\Delta}, \\ \tilde{M} &= K_\psi \psi + C_\psi \dot{\psi}, \\ \tilde{C}\tilde{F} &= C_1 \dot{\psi} + \psi, \\ Z - Z_* &= \Delta, \\ \dot{Z}_* + V(\varphi - \psi) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где  $\tilde{F}(t), \tilde{M}(t), Z_*(t), \Delta(t), \psi(t)$  – неизвестные функции времени;

$Z(t), \varphi(t)$  – известные функции времени вида (4);

$K_\Delta, C_\Delta, K_\psi, C_\psi, \tilde{C}, C_1$  – постоянные коэффициенты, являющиеся характеристиками свойств шины;

$Z_*$  – координата точки  $C_*$  вдоль оси  $O_g Z_g$  (рис. 1а);

$\Delta$  и  $\psi$  – поперечная деформация и угол поворота зоны контакта шины относительно диска колеса, соответственно.

Последнее из этих уравнений есть условие равенству нулю поперечной составляющей скорости центра масс колеса или, другими словами, *условие отсутствия поперечного скольжения шины*).

**3.1. Поперечное поступательное движение.** Из общей системы 5-ти уравнений (8) относительно функций  $\tilde{F}_z(t), \tilde{M}_z(t), Z_{*z}(t), \Delta_z(t), \psi_z(t)$  выделим систему 2-х уравнений относительно 2-х последних из них, а именно:

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{C}K_\Delta)\Delta_z + (\tilde{C}C_\Delta)\dot{\Delta}_z - \psi_z - C_1\dot{\psi}_z &= 0, \\ \dot{\Delta}_z + V\psi_z &= \dot{Z} \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Учтем закон смещения (4). Решение полученной системы уравнений будем искать в виде, соответствующем характеру вынужденных колебаний:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_z(t) &= Z_0 [S_{\Delta z} \sin \theta_z(t) + C_{\Delta z} \cos \theta_z(t)], \\ \psi_z(t) &= \frac{Z_0}{D} [S_{\psi z} \sin \theta_z(t) + C_{\psi z} \cos \theta_z(t)] \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

где  $S_{\Delta z}, C_{\Delta z}, S_{\psi z}, C_{\psi z}$  – требующие нахождения безразмерные постоянные.

Найдя только что перечисленные постоянные, и, приняв во внимание два первых уравнения системы (8), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_Z(t) &= K_{\Delta} Z_0(t) [S_{FZ} \sin \theta_Z(t) + C_{FZ} \cos \theta_Z(t)], \\ \tilde{M}_Z(t) &= K_{\Delta} D Z_0(t) [S_{MZ} \sin \theta_Z(t) + C_{MZ} \cos \theta_Z(t)] \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Введем обозначения для используемых далее безразмерных параметров:  $\bar{\Omega}_Z = \omega_Z D / V$  – приведенная (по [3]) частота возбуждения, являющаяся важным характеристическим параметром задачи,  $D$  – внешний диаметр шины;

$$\alpha_1 = \frac{C_{\Delta} V}{K_{\Delta} D}; \alpha_2 = \frac{K_{\Psi}}{K_{\Delta} D^2}; \alpha_3 = \frac{C_{\Psi} V}{K_{\Delta} D^3}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} S_{FZ} &= S_{\Delta Z} - \bar{\Omega}_Z \alpha_1 C_{\Delta Z}, \\ C_{FZ} &= C_{\Delta Z} + \bar{\Omega}_Z \alpha_1 S_{\Delta Z}; \\ S_{MZ} &= \alpha_2 S_{\Psi Z} - \bar{\Omega}_Z \alpha_3 C_{\Psi Z}, \\ C_{MZ} &= \alpha_2 C_{\Psi Z} + \bar{\Omega}_Z \alpha_3 S_{\Psi Z} \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Как видим, задача свелась к определению постоянных  $S_{\Delta Z}, C_{\Delta Z}, S_{\Psi Z}, C_{\Psi Z}$ . Найдем их.

Подстановка (10) в (9) приведет к системе 4-х линейных уравнений с постоянными коэффициентами относительно искомых величин, решая которую найдем:

$$\begin{aligned} S_{\Delta Z} &= \bar{\Omega}_Z \frac{a_Z c_Z + b_Z}{a_Z^2 + b_Z^2}; \quad C_{\Delta Z} = \bar{\Omega}_Z \frac{b_Z c_Z - a_Z}{a_Z^2 + b_Z^2}; \\ S_{\Psi Z} &= \bar{\Omega}_Z C_{\Delta Z}, \quad C_{\Psi Z} = \bar{\Omega}_Z (1 - S_{\Delta Z}), \end{aligned}$$

где

$$a_Z = \frac{C_1 V}{D} \bar{\Omega}_Z^2 - \tilde{C} K_{\Delta} D; \quad b_Z = \bar{\Omega}_Z (1 + \tilde{C} C_{\Delta} V); \quad c_Z = \bar{\Omega}_Z C_1 V / D.$$

Представим выражения (11) в ином *едином для разных случаев нагружения и моделей* виде:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_Z(t) &= K_{\Delta} Z_0 A_{FZ} \sin(\omega_Z t + \beta_{FZ}), \\ \tilde{M}_Z(t) &= K_{\Delta} Z_0 D A_{MZ} \sin(\omega_Z t + \beta_{MZ}) \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

где  $A_{FZ} = \sqrt{S_{FZ}^2 + C_{FZ}^2}$  – безразмерная амплитуда силы;

$\beta_{FZ} = \arctg\left(\frac{C_{FZ}}{S_{FZ}}\right)$  – фазовый угол силы;

$A_{MZ} = \sqrt{S_{MZ}^2 + C_{MZ}^2}$  – безразмерная амплитуда момента;

$\beta_{MZ} = \arctg\left(\frac{C_{MZ}}{S_{MZ}}\right)$  – фазовый угол момента.

**3.2. Чистый поворот.** Для случая (4), (7) из общей системы 5-ти уравнений (8) относительно функций  $\tilde{F}_{\varphi}(t), \tilde{M}_{\varphi}(t), Z_{*\varphi}(t), \Delta_{\varphi}(t), \Psi_{\varphi}(t)$  выделим систему двух уравнений относительно двух последних из этих функций, а именно:

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{C} K_{\Delta}) \Delta_{\varphi} + (\tilde{C} C_{\Delta}) \dot{\Delta}_{\varphi} - \Psi_{\varphi} - C_1 \dot{\Psi}_{\varphi} &= 0, \\ \dot{\Delta}_{\varphi} + V \Psi_{\varphi} &= V \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Решение полученной системы уравнений будем искать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\varphi}(t) &= D A_{\varphi}(t) [S_{\Delta\varphi} \sin \theta_{\varphi}(t) + C_{\Delta\varphi} \cos \theta_{\varphi}(t)], \\ \Psi_{\varphi}(t) &= A_{\varphi}(t) [S_{\Psi\varphi} \sin \theta_{\varphi}(t) + C_{\Psi\varphi} \cos \theta_{\varphi}(t)] \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

где  $S_{\Delta\varphi}, C_{\Delta\varphi}, S_{\psi\varphi}, C_{\psi\varphi}$  – требующие нахождения безразмерные постоянные.

Найдя только что перечисленные постоянные, и, приняв во внимание два первых уравнения системы (8), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_\varphi(t) &= K_\Delta D A_\varphi(t) [S_{F\varphi} \sin \theta_\varphi(t) + C_{F\varphi} \cos \theta_\varphi(t)], \\ \tilde{M}_\varphi(t) &= K_\Delta D^2 A_\varphi(t) [S_{M\varphi} \sin \theta_\varphi(t) + C_{M\varphi} \cos \theta_\varphi(t)] \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_{F\varphi} &= S_{\Delta\varphi} - \overline{\Omega}_\varphi \alpha_1 C_{\Delta\varphi}, \\ C_{F\varphi} &= C_{\Delta\varphi} + \overline{\Omega}_\varphi \alpha_1 S_{\Delta\varphi}; \\ S_{M\varphi} &= \alpha_2 S_{\psi\varphi} - \overline{\Omega}_\varphi \alpha_3 C_{\psi\varphi}, \\ C_{M\varphi} &= \alpha_2 C_{\psi\varphi} + \overline{\Omega}_\varphi \alpha_3 S_{\psi\varphi} \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

где  $\overline{\Omega}_\varphi = \omega_\varphi D / V$ .

Подстановка (15) в (14) приведет к системе 4-х линейных уравнений с постоянными коэффициентами относительно искомых величин, откуда найдем:

$$\begin{aligned} S_{\Delta\varphi} &= \frac{b_\varphi c_\varphi - a_\varphi}{a_\varphi^2 + b_\varphi^2}; \quad C_{\Delta\varphi} = -\frac{a_\varphi c_\varphi + b_\varphi}{a_\varphi^2 + b_\varphi^2}; \\ S_{\psi\varphi} &= 1 + \overline{\Omega}_\varphi C_{\Delta\varphi}, \quad C_{\psi\varphi} = -\overline{\Omega}_\varphi S_{\Delta\varphi}. \end{aligned}$$

где

$$a_\varphi = \frac{C_1 V}{D} \overline{\Omega}_\varphi^2 - \tilde{C} K_\Delta D; \quad b_\varphi = \overline{\Omega}_\varphi (1 + \tilde{C} C_\Delta V); \quad c_\varphi = \overline{\Omega}_\varphi C_1 V / D.$$

Преобразуем выражения (16) к единому виду:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_\varphi(t) &= K_\Delta D A_{F\varphi} \sin(\omega_\varphi t + \beta_{F\varphi}), \\ \tilde{M}_\varphi(t) &= K_\Delta D^2 A_{M\varphi} \sin(\omega_\varphi t + \beta_{M\varphi}) \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

где  $A_{F\varphi} = \sqrt{S_{F\varphi}^2 + C_{F\varphi}^2}$  – безразмерная амплитуда силы;

$\beta_{F\varphi} = \arctg\left(\frac{C_{F\varphi}}{S_{F\varphi}}\right)$  – фазовый угол силы;

$A_{M\varphi} = \sqrt{S_{M\varphi}^2 + C_{M\varphi}^2}$  – безразмерная амплитуда момента;

$\beta_{M\varphi} = \arctg\left(\frac{C_{M\varphi}}{S_{M\varphi}}\right)$  – фазовый угол момента.

Зададимся параметрами, характеризующими механические свойства шины  $D = 0,35$  метров (табл.1), и построим графики функций  $A_{FZ}(\overline{\Omega}_Z)$ ,  $\beta_{FZ}(\overline{\Omega}_Z)$  и  $A_{MZ}(\overline{\Omega}_Z)$ ,  $\beta_{MZ}(\overline{\Omega}_Z)$  (рис.2), а также  $A_{F\varphi}(\overline{\Omega}_\varphi)$ ,  $\beta_{F\varphi}(\overline{\Omega}_\varphi)$  и  $A_{M\varphi}(\overline{\Omega}_\varphi)$ ,  $\beta_{M\varphi}(\overline{\Omega}_\varphi)$ , (рис.3).

Таблица 1 - Механические свойства шины [7]

$K_\Delta$ , кН/м	$C_\Delta$ , нс/м	$K_\psi$ , м/рад	$C_\psi$ , нмс/рад	$\tilde{C}$ , рад/н	$C_1$ , с
238,75	205	665	0,7	0,00002356	0,0010886

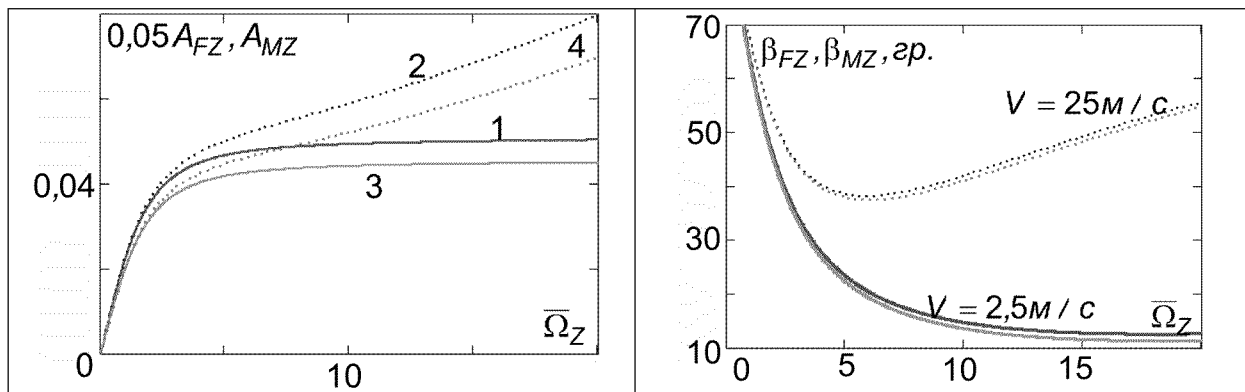


Рисунок 2 - Модель Сура-Сурьянараяна. Поперечно поступательное движение

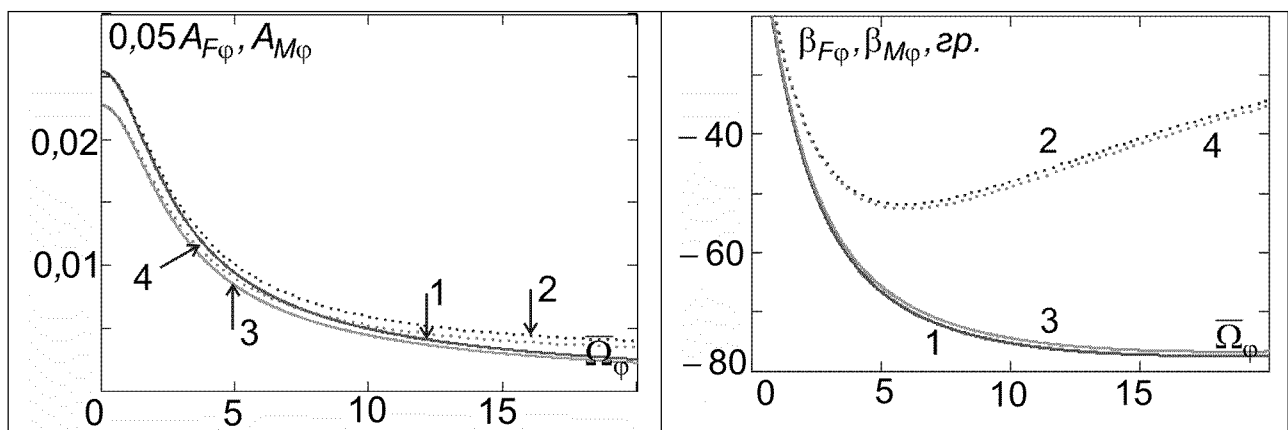


Рисунок 3 - Модель Сура-Сурьянараяна. Чистый поворот

Сплошные линии построены для скорости  $V = 2,5 \text{ м/с}$ , а пунктирные – для скорости  $V = 25 \text{ м/с}$ . Линии «1» и «2» описывают поперечную силу, а «3» и «4» - восстанавливающий момент.

**4. Модель Тхота-Краускопфа-Ловенберга.** Приведем уравнения шины [5] для рассматриваемых в данной работе задач:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Delta}_f + (V/\lambda)\Delta_f &= V\phi + \dot{Z} - 2h\dot{\phi}, \\ \tilde{F} &= K_F \tilde{U}, \\ \tilde{M} &= K_M \tilde{U}, \\ \tilde{U} &= \Delta_f / \lambda \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

где  $\Delta_f$  – поперечная деформация шины, определенная в носовой (в переводе с английского “fore” – нос) точке зоны контакта шины с опорной поверхностью;

$\lambda$  – длина релаксации шины;

$2h$  - длина зоны контакта.

Величины  $\Delta_f, \tilde{F}, \tilde{M}, \tilde{U}$  – функции времени, величины  $V, \lambda, K_F, K_M$  – постоянные.

Коэффициенты поперечной силы и восстанавливающего момента  $K_F, K_M$  найдем, используя зависимости установившегося увода  $F(U), M(U)$ :

$$\left. \begin{aligned} K_F &= \left. \frac{dF}{dU} \right|_{U=0}, \\ K_M &= \left. \frac{dM}{dU} \right|_{U=0} \end{aligned} \right\}.$$

Понятно, что

$$\tilde{M} = (K_M / K_F) \tilde{U}.$$

Поэтому достаточно для случаев поперечного поступательного движения и чистого поворота определить поперечную силу  $\tilde{F}$ , а также соотношение  $K_M / K_F$ .

4.1. *Поперечно поступательное движение.* Решив для случая (4), (6) дифференциальное уравнение системы (20), найдем:

$$\Delta_{fz}(t) = Z_0 [S_{fz} \sin \theta_z(t) + C_{fz} \cos \theta_z(t)], \quad (20)$$

где

$$S_{fz} = \frac{(\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_z)^2}{1 + (\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_z)^2}; \quad C_{fz} = \frac{\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_z}{1 + (\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_z)^2},$$

где  $\bar{\lambda} = \lambda / D$  – относительная длина релаксации. Теперь имеем

$$\tilde{F}_z(t) = (K_F / \lambda) Z_0 A_{Fz} \sin(\omega_z t + \beta_{Fz}),$$

где  $K_F / \lambda = k$  – статическая боковая жесткость шины;

$$A_{Fz} = \sqrt{S_{fz}^2 + C_{fz}^2}; \quad \beta_{Fz} = \text{arctg}(C_{fz} / S_{fz}).$$

4.2. *Чистый поворот.* Для случая (4), (7):

$$\Delta_{f\varphi}(t) = D A_{f\varphi}(t) [S_{f\varphi} \sin \theta_\varphi(t) + C_{f\varphi} \cos \theta_\varphi(t)],$$

где

$$S_{f\varphi} = \frac{\bar{\lambda} - 2\bar{h} \cdot (\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_\varphi)^2}{1 + (\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_\varphi)^2}; \quad C_{f\varphi} = -(\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_\varphi) \frac{2\bar{h} + \bar{\lambda}}{1 + (\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_\varphi)^2},$$

где, в свою очередь,  $\bar{h} = h / D$  – относительная полудлина зоны контакта шины с опорной поверхностью.

Далее найдем:

$$\tilde{F}_\varphi(t) = (K_F / \lambda) D \varphi_0 A_{F\varphi} \sin(\omega_\varphi t + \beta_{F\varphi}),$$

где  $A_{F\varphi} = \sqrt{S_{f\varphi}^2 + C_{f\varphi}^2}; \quad \beta_{F\varphi} = \text{arctg}(C_{f\varphi} / S_{f\varphi})$ .

Потребное для нахождения момента  $\tilde{M}(t)$  отношение коэффициентов равно [9]:

$$K_M / K_F = h / 3.$$

Поэтому:

$$\tilde{M}_z(t) = (K_F / \lambda) D Z_0 A_{Mz} \sin(\omega_z t + \beta_{Mz}),$$

$$\tilde{M}_\varphi(t) = (K_F / \lambda) D^2 \varphi_0 A_{M\varphi} \sin(\omega_\varphi t + \beta_{M\varphi}),$$

где  $A_{Mz} = \frac{1}{3} \bar{h} A_{Fz};$

$\beta_{Mz} = \beta_{Fz}$  и  $A_{M\varphi} = \frac{1}{3} \bar{h} A_{F\varphi};$

$\beta_{M\varphi} = \beta_{F\varphi}.$

**5. Модель Кларка-Доджа-Найбаккена.** Искомые величины будем находить как функции поперечной деформации шины в передней и задней точках зоны ее контакта с опорной поверхностью, которые обозначим  $\Delta_f$  и  $\Delta_a$ , соответственно. (В переводе с английского «aft» - корма).

Обозначим через  $Z_f, Z_a$  координаты по оси  $O_g Z_g$  передней и задней кромки зоны контакта шины и опорной плоскости, соответственно. Запишем в виде близком к [3] систему уравнений для нахождения силы и момента в общем случае нагружения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F} &= C_F(\Delta_f + \Delta_a)/2, \tilde{M} = C_M(\Delta_a - \Delta_f)/2, \\ \dot{Z}_f + \left(\frac{V}{\lambda}\right)Z_f &= \left(\frac{V}{\lambda}\right)Z - V\varphi\left(1 + \frac{h}{\lambda}\right), \\ \Delta_f &= Z_f - Z + h\varphi, \Delta_a = Z_a - Z - h\varphi, \\ Z_a(t) &= Z_f(t-T) \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

где  $C_F, C_M, \lambda, h, T$  – постоянные величины;

$Z, \varphi$  – заданные функции времени (4);

$\tilde{F}, \tilde{M}$  – искомые функции времени;

$Z_f, Z_a$  – неизвестные функции времени;

$C_F = k, C_M = k\left[\frac{h^2}{3(\lambda+h)} + \lambda\right]$  – коэффициенты силы и момента соответственно;

$T = 2h/V$  – временное запаздывание.

Система уравнений (21) содержит одно линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами и пять конечных соотношений; неизвестными здесь выступают шесть функций времени:

$$\tilde{F}(t), \tilde{M}(t), Z_f(t), Z_a(t), \Delta_f(t), \Delta_a(t).$$

При совместном рассмотрении уравнений (21) найдем:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F} &= \frac{1}{2}C_F[Z_f(t-T) + Z_f(t) - 2Z(t)], \\ \tilde{M} &= \frac{1}{2}C_M[Z_f(t-T) - Z_f(t) - 2h\varphi(t)] \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

Для дальнейшего коэффициенты силы и момента запишем в виде:

$$C_F = k, C_M = kD\left[\frac{\bar{h}^2}{3(\bar{\lambda} + \bar{h})} + \bar{\lambda}\right].$$

**5.1. Поперечно поступательное движение.** Функцию  $Z_f(t)$  найдем, решив соответствующее усеченное дифференциальное системы (21). Придем к:

$$Z_{fz}(t) = Z_0(s_{fz} \sin \omega_z t + c_{fz} \cos \omega_z t),$$

где

$$s_{fz} = \frac{1}{1 + (\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_z)^2}; \quad c_{fz} = -\frac{\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_z}{1 + (\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_z)^2}.$$

Далее найдем функцию  $Z_{fz}(t-T)$ . Будем иметь:

$$Z_{fz}(t-T) = Z_0(s_{az} \sin \omega_z t + c_{az} \cos \omega_z t),$$

где с учетом величины запаздывания:

$$s_{az} = s_{fz} \cos(2\bar{h}\bar{\Omega}_z) + c_{fz} \sin(2\bar{h}\bar{\Omega}_z); \quad c_{az} = -s_{fz} \sin(2\bar{h}\bar{\Omega}_z) + c_{fz} \cos(2\bar{h}\bar{\Omega}_z).$$

Подытоживая, запишем

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_Z &= C_F Z_0 (S_{FZ}^* \sin \omega_z t + C_{FZ}^* \cos \omega_z t), \\ \tilde{M}_Z &= C_M Z_0 (S_{MZ}^* \sin \omega_z t + C_{MZ}^* \cos \omega_z t) \end{aligned} \right\},$$

где

$$S_{FZ}^* = \frac{1}{2}(s_{fz} + s_{az} - 2); \quad C_{FZ}^* = \frac{1}{2}(c_{fz} + c_{az});$$

$$S_{MZ}^* = \frac{1}{2}(s_{az} - s_{fz}); \quad C_{MZ}^* = \frac{1}{2}(c_{az} - c_{fz})$$

и

$$\tilde{F}_Z(t) = C_F Z_0 A_{FZ} \sin(\omega_z t + \beta_{FZ}), \quad \tilde{M}_Z(t) = C_M Z_0 D A_{MZ} \sin(\omega_z t + \beta_{MZ}),$$

где



$$A_{FZ} = \sqrt{S_{FZ}^{*2} + C_{FZ}^{*2}}; \beta_{FZ} = \text{arctg}(C_{FZ}^* / S_{FZ}^*);$$

$$A_{MZ} = \left[ \frac{\bar{h}^2}{3(\bar{\lambda} + \bar{h})} + \bar{\lambda} \right] \sqrt{S_{MZ}^{*2} + C_{MZ}^{*2}}; \beta_{MZ} = \text{arctg}(C_{MZ}^* / S_{MZ}^*).$$

5.2. Чистый поворот. Последовательно найдем:

$$Z_{f\varphi}(t) = \varphi_0 D(s_{f\varphi} \sin \omega_\varphi t + c_{f\varphi} \cos \omega_\varphi t),$$

где

$$s_{f\varphi} = -\frac{\bar{\lambda} + \bar{h}}{1 + (\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_\varphi)^2}; c_{f\varphi} = \frac{\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_\varphi (\bar{\lambda} + \bar{h})}{1 + (\bar{\lambda} \cdot \bar{\Omega}_\varphi)^2};$$

$$Z_{\alpha\varphi}(t - T) = \varphi_0 D(s_{\alpha\varphi} \sin \omega_\varphi t + c_{\alpha\varphi} \cos \omega_\varphi t),$$

где с учетом величины запаздывания:

$$s_{\alpha\varphi} = s_{f\varphi} \cos(2\bar{h}\bar{\Omega}_\varphi) + c_{f\varphi} \sin(2\bar{h}\bar{\Omega}_\varphi); c_{\alpha\varphi} = -s_{f\varphi} \sin(2\bar{h}\bar{\Omega}_\varphi) + c_{f\varphi} \cos(2\bar{h}\bar{\Omega}_\varphi).$$

Далее придем к:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_\varphi &= C_F \varphi_0 D(S_{F\varphi}^* \sin \omega_\varphi t + C_{F\varphi}^* \cos \omega_\varphi t), \\ \tilde{M}_\varphi &= C_M \varphi_0 D(S_{M\varphi}^* \sin \omega_\varphi t + C_{M\varphi}^* \cos \omega_\varphi t) \end{aligned} \right\}$$

где

$$S_{F\varphi}^* = \frac{1}{2}(s_{f\varphi} + s_{\alpha\varphi}); C_{F\varphi}^* = \frac{1}{2}(c_{f\varphi} + c_{\alpha\varphi});$$

$$S_{M\varphi}^* = \frac{1}{2}(s_{\alpha\varphi} - s_{f\varphi} - 2\bar{h}); C_{M\varphi}^* = \frac{1}{2}(c_{\alpha\varphi} - c_{f\varphi}).$$

Окончательно,

$$\tilde{F}_\varphi(t) = C_F D \varphi_0 A_{F\varphi} \sin(\omega_\varphi t + \beta_{F\varphi}),$$

где

$$A_{F\varphi} = \sqrt{S_{F\varphi}^{*2} + C_{F\varphi}^{*2}}; \beta_{F\varphi} = \text{arctg}(C_{F\varphi}^* / S_{F\varphi}^*)$$

и

$$\tilde{M}_\varphi(t) = C_M D^2 \varphi_0 A_{M\varphi} \sin(\omega_\varphi t + \beta_{M\varphi}),$$

где

$$A_{M\varphi} = \left[ \frac{\bar{h}^2}{3(\bar{\lambda} + \bar{h})} + \bar{\lambda} \right] \sqrt{S_{M\varphi}^{*2} + C_{M\varphi}^{*2}}; \beta_{M\varphi} = \text{arctg}(C_{M\varphi}^* / S_{M\varphi}^*).$$

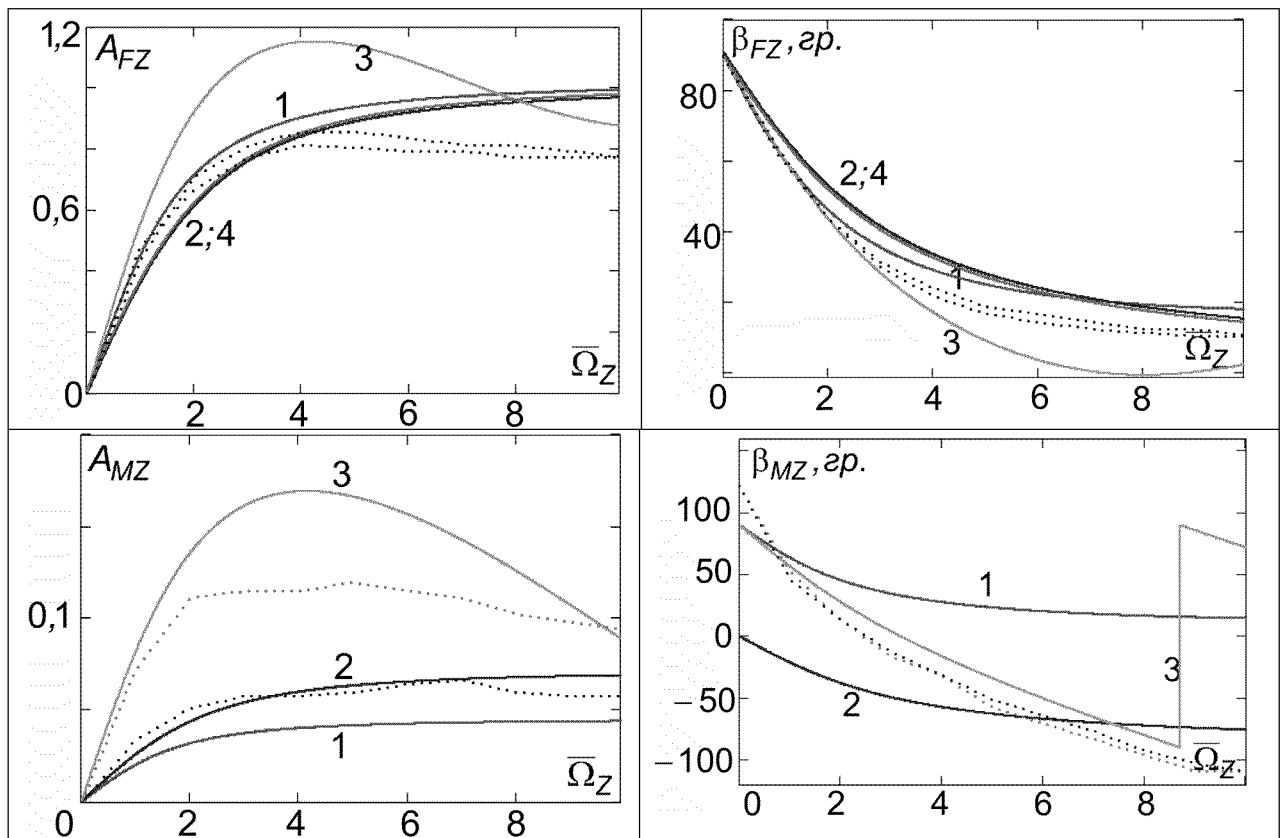
## 6. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных.

В таблице 2 приведем данные для расчетов, а на рис.4 – результаты расчетов для рассматриваемых моделей и случаев нагружения. Сплошные линии на рисунке являются выше описанными теоретическими результатами, а пунктиром изображены экспериментальные данные [3,4]. Линии «1» соответствуют модели Сура-Сурьянараяна для  $V = 2,5 м/с$ , линии «2» - модели Тхота-Краускопфа-Ловенберга, линии «3» - модели Кларка-Доджа-Найбаккена для конечной длины зоны контакта ( $h \neq 0$ ), линии «4» - модели Кларка-Доджа-Найбаккена для точечного контакта ( $h = 0$ ).

Таблица 2 - Данные для расчетов

Шина	$\bar{h} = h/D$	$\bar{\lambda} = \lambda/D$
A23	0,214	0,390
A24	0,214	0,304

*Поперечно поступательное движение*



*Чистый поворот*

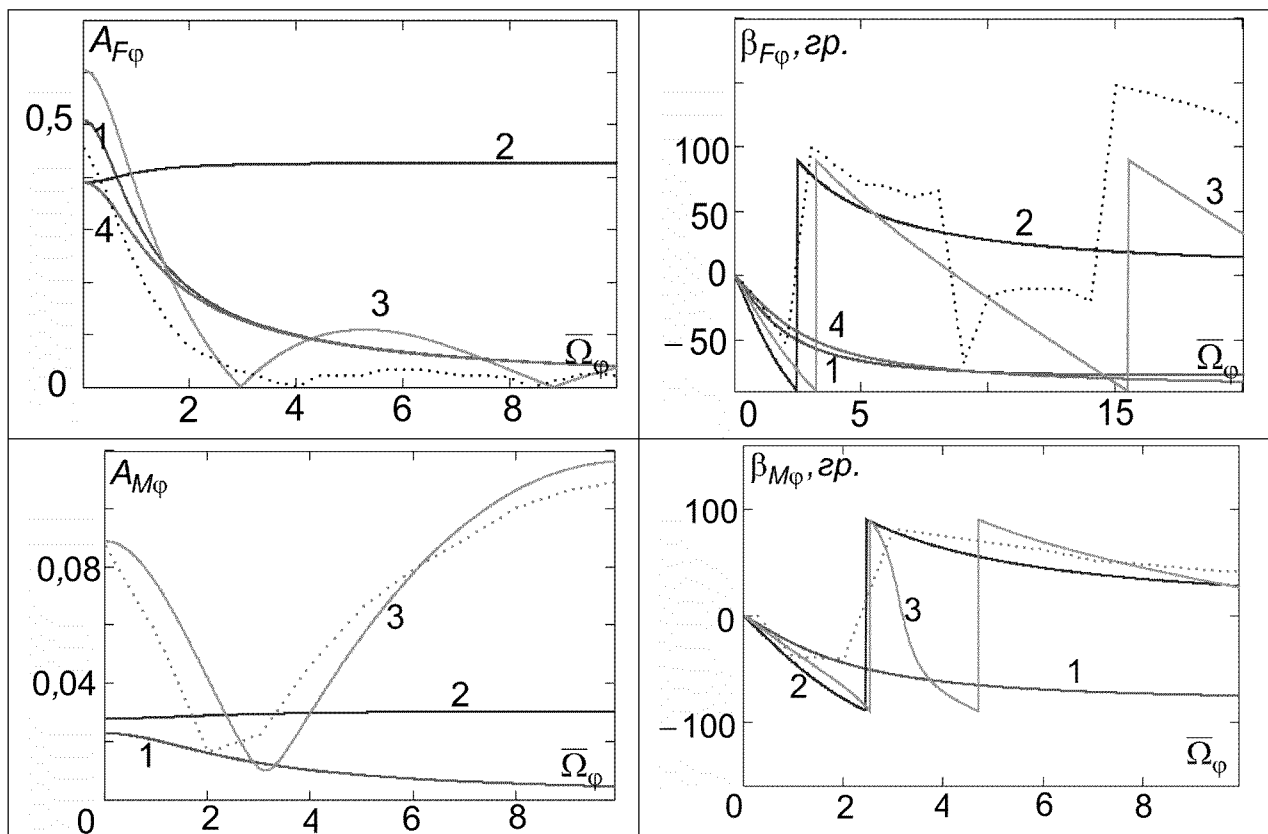


Рисунок 4 - Теоретические и экспериментальные данные

Экспериментальные данные получены в ходе динамических испытаний мелко масштабных моделей авиационных шин A20, A23, A24; при этом частоты возбуждения варьировались в диапазоне от 1 до 7 Гц, а скорости  $V$  - от 0,256 до 11,8 м/с.

Обратим внимание на кривые «4». Они построены для случая, который в авторских работах назван случаем точечного контакта, т.е. при условии, что  $h=0$  м. Однако те же кривые будем иметь при экстраполяции полученных результатов на случаи высокой скорости движения. При  $V \rightarrow \infty$  будем иметь:

$$T \rightarrow 0, Z_a \rightarrow Z_f, \tilde{M} \rightarrow 0 \text{ и } \bar{\Omega} \rightarrow 0.$$

**7. Выводы и заключение.** В работе приведены к единому виду и сопоставлены с лабораторными экспериментальными данными временные функции поперечной силы трения  $\tilde{F}(t)$  и восстанавливающего момента  $\tilde{M}(t)$  на катящейся шине для двух случаев ее вынужденных колебаний (поперечно поступательное движение и чистый поворот) и при использовании трех теоретических моделей. (Причем, одна из моделей, модель Кларка-Доджа-Найбаккена, рассмотрена в двух версиях – бесконечно малой и конечной длины зоны контакта шины с опорной поверхностью). Сопоставлены графики функций амплитуды и фазового угла от приведенной частоты возбуждения.

Установлено:

1. Для всех моделей, исключая модель Сура-Сурьянараяна, существует один комплексный параметр условий качения и внешнего нагружения – приведенная по Кларку-Доджу-Найбаккену частота нагружения. (В модели Сура-Сурьянараяна имеют место два параметра внешнего нагружения - приведенная частота нагружения и скорость движения шины).

2. Все модели поставляют близкие между собой и с экспериментальными данными результаты лишь в отношении поперечной силы трения при поперечно поступательном движении шины.

3. Модель Кларка-Доджа-Найбаккена в версии конечной длины контакта для различных компонентов трения и режимов нагружения шины дает результаты, по меньшей мере, качественно адекватные экспериментальным результатам.

4. При использовании модели неустановившегося движения шины, как составной части динамической модели пневмоколесной машины, необходимо оценивать ее пригодность для рассматриваемых конструкций подвески и режимов движения машины.

С учетом результатов данной работы и работы [11] представляется, что учет эффектов запаздывания при качении шины является необходимым элементом моделирования неустановившегося движения колес шасси пневмоколесных машин.

## Список литературы

1. Pacejka H.V. Tyre and vehicle dynamics. Butterworth-Heinemann, 2006. - 642 p.
2. Rill G. First order tire dynamics/III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering. Lisbon, 5-8 June 2006, 9 p.
3. Clark S., Dodge R., Nybakken G. Dynamic properties of aircraft tires// J. aircraft. – 1974.- Vol.11, №3.- P. 166-172.
4. Clark S., Dodge R., Nybakken G. An evaluation of string theory for the prediction of dynamic tire properties using scale model aircraft tires/NASA report CR-2058. Washington, 1972.- 47 p.
5. Thota P., Krauskopf B., Lowenberg M. Interaction of torsion and lateral bending in aircraft nose landing gear shimmy//Nonlinear Dynamics. 2009, v.57, №3. P.455-467.
6. Thota P., Krauskopf B., Lowenberg M. Shimmy in a nonlinear model of an aircraft nose landing gear with non-zero rake angle/Proceedings of European Nonlinear Oscillations Conference (ENOC-2008), Saint Petersburg, Russia, 30 June-4 July 2008. 5 p.
7. Sura N.K., Suryanarayan S. Lateral response of nose-wheel landing gear system to ground-induced excitation//Journal of aircraft, vol.44, No. 6, 2007.- 1998-2005 p.
8. Von Schlippe B., Dietrich R. Das Flattern eines bepneuten Rades, Bericht 140 der Lilienthal Gesellschaft (1941), English translation: NACA TM 1365, 1954, pp. 125-147.

9. Moreland W.J. The story of shimmy//Journal of the aeronautical sciences, vol.21, No 12, 1954. P.793-808.
10. Плахтиенко Н.П., Шифрин Б.М. Одноступенная модель колебаний опоры шасси самолета// Техн. механика. – 2006.- №1.– С.16-25.
11. Ларькин Е.И. Сопоставление различных теорий качения пневматика в применении к задаче шимми колес самолета//Труды ЦАГИ.– Вып.1893. 1977.– С.3-15.
12. Takacs D., Orosz G., Stepan G. Delay effects in shimmy dynamics of wheels with stretched string-like tyres//European journal of mechanics A/Solid, №28, 2009. P.516-525.

*Б. Шифрин*

**Зіставлення моделей тертя на шині при її коливаннях**

Теоретично вивчені поперечна сила тертя і поновлюючий момент, що виникають на шині при її несталому (що коливає) русі поблизу нульового кута відведення. Приведені до єдиного вигляду і зіставлені між собою, а також з даними експериментів результати моделювання, отримані при використанні трьох моделей.

*B. Shifrin*

**Comparison of the models of frictions on a tyre unset (shake) motion**

In theory studied transversal force frictions and evocative moment, arising up on a tyre at its unset (shake) motion near-by a zero corner of withdrawal. Resulted to the single kind and confronted between itself, and also with by information of experiments results designs, got at the use of three models.

Получено 30.11.09