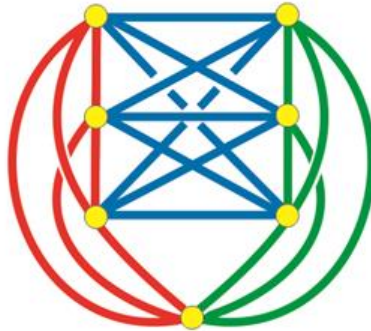


Міністерство освіти і науки України
Центральноукраїнський національний технічний університет
Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України
Національний університет «Запорізька політехніка»
Запорізький національний університет
Інститут модернізації та змісту освіти
Університет Кардіффу
Мадридський політехнічний університет
Громадська організація «Системні дослідження»
Громадська організація МДЦВЕ

Матеріали XXVIII Міжнародного науково-практичного семінару

**КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ
ТА ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ**

7-9 травня 2026 року



Кропивницький - Запоріжжя - Київ
2026

Редакційна колегія:

Леонід ГУЛЯНИЦЬКИЙ, член-кор. НАН України, д.т.н.;
Анна БАКУРОВА, д.е.н., професор;
Ігор КОЗІН, д.ф.-м.н., професор;
Марина СЕМЕНЮТА, к.ф.-м.н., доцент;
Василь ШЕНДЕРОВСЬКИЙ, д.ф.-м.н., професор.

Комбінаторні конфігурації та їхні застосування: Матеріали ХХVІІІ Міжнародного науково-практичного семінару, (Кропивницький–Запоріжжя–Київ, 7-9 травня 2026 року) / за ред. Л.Ф. Гуляницького – Кропивницький: ПП «Ексклюзив-Систем», 2026. – 244 с.

ISBN 978-617-7942-41-1

У збірнику подано матеріали ХХVІІІ Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їхні застосування», який відбувся 7-9 травня 2026 року. Коло обговорених проблем: актуальні питання теорії графів, комбінаторної, лінійної та векторної оптимізації, математичного моделювання дискретних систем і мереж Петрі, аналізу енергетичних та економічних мереж, застосування штучного інтелекту, машинного навчання й обробки великих даних. Значну увагу було приділено задачам авіації та оптимізації місій груп БПЛА, кібербезпеці, GPU-прискоренню алгоритмів, а також прикладним дослідженням у галузі робототехніки та комп'ютерного зору. У межах семінару робота проводилася за п'ятьма основними науковими напрямками, що охоплювали комбінаторні конфігурації та оптимізацію на графах, математичну логіку й теорію прийняття рішень, моделі дискретних процесів, програмне забезпечення для аналізу комбінаторних структур, а також графі знань, онтології та системи штучного інтелекту.

Для науковців, викладачів вищих навчальних закладів, а також аспірантів, студентів і фахівців із застосування комбінаторних конфігурацій.

Програмний комітет конференції

Леонід ГУЛЯНИЦЬКИЙ	член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділом методів комбінаторної оптимізації та інтелектуальних ІТ Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, голова програмного комітету;
Марина СЕМЕНЮТА	кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики та фізики Центральноукраїнського національного технічного університету, співголова програмного комітету;
Анна БАКУРОВА	доктор економічних наук, професор, професор кафедри системного аналізу та обчислювальної математики національного університету «Запорізька політехніка», особа, що представляє Громадську організацію «Системні дослідження», співголова програмного комітету;
Стен УРЯСЄВ	професор, завідувач кафедри прикладної математики та статистики родини Фрей, Університет Стоні-Брук, США;
Олександр КОНОВАЛОВ	кандидат фізико-математичних наук, доцент, викладач Школи комп'ютерних наук Університету Сент-Ендрюса, Шотландія
Борис ГОЛЬДЕНГОРІН	професор, Школа математики та доктор технічних наук, професор, PhD, Університет Гронінгена, Нідерланди
Улугбек НАРЗУЛЛАЄВ	кандидат фізико-математичних наук, доцент, декан факультету телекомунікаційних технологій і професійної освіти Самаркандського філіалу Ташкентського університету інформаційних технологій, Узбекистан;
Сергій ЯКОВЛЕВ	член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, професор-дослідник відділу математичного моделювання Інституту математики Лодзького політехнічного університету, Польща;
Пьотр МОРМУЛЬ	професор математики, Варшавський університет, Польща;
Олег ДМІТРІЄВ	доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник ДНДІ ВС ОВТ;

Ігор КОЗІН	доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики Запорізького національного університету;
Сергій КРИВИЙ	доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інтелектуальних програмних систем Київського національного університету ім. Тараса Шевченка;
Віктор КУЗЬМЕНКО	кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділом економічної кібернетики Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України;
Микола МАЛЯР	доктор технічних наук, професор, декан факультету математики та цифрових технологій Ужгородського національного університету;
Марина НОВОЖИЛОВА	доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, Харківський національний університет міського господарства ім. О.Бекетова
Віталій ПЕРЕПЕЛИЦЯ	доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики Запорізького національного університету
Тетяна РОМАНОВА	доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник відділу моделювання та ідентифікації теплових процесів в енерготехнологічному обладнанні Інституту енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного Національної академії наук України;
Олексій СМІРНОВ	доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри кібербезпеки та програмного забезпечення Центральноукраїнського національного технічного університету;
Петро СТЕЦЮК	член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділом методів негладкої оптимізації Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України;
Еліна ТЕРЕЩЕНКО	кандидат фізико-математичних наук, доцент, в.о. завідувача кафедри системного аналізу та обчислювальної математики національного університету «Запорізька політехніка»
Надія ТИМОФІЄВА	доктор технічних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділом комплексних досліджень інформаційних технологій Інституту

Валентина ТУРЧИНА	інформаційних технологій та систем Національної академії наук України; кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету ім.О.Гончара;
Світлана УС	кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри системного аналізу і управління Національного технічного університету «Дніпровська політехніка»
Василь ШЕНДЕРОВСЬКИЙ	доктор фізико-математичних наук, професор, віце-президент Українського фізичного товариства;
Тетяна ШМЕЛЬОВА	доктор технічних наук, професор, професор кафедри аеронавігаційних систем Національного Державного університету «Київський авіаційний інститут»;
Зоя ШЕРМАН	кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальних та медико-профілактичних дисциплін Міжнародного європейського університету.

Організаційний комітет:

Андрій ТИХИЙ	кандидат технічних наук, доцент, проректор з наукової роботи та міжнародних зв'язків Центральноукраїнського національного технічного університету, голова організаційного комітету;
Сергій ЯКИМЕНКО	кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики та фізики Центральноукраїнського національного технічного університету, заступник голови організаційного комітету;
Ірина ФІЛІМОНІХІНА	кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики та фізики Центральноукраїнського національного технічного університету, секретар організаційного комітету;
Людмила ДЖУМА	кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та авіаційних робототехнічних систем Української державної льотної академії;
Василь ГУЦУЛ	кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики та фізики

Галина КОЗИНА	Центральноукраїнського національного технічного університету кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри захисту інформації НУ «Запорізька політехніка»
Сергій ОСАДЧИЙ	доктор технічних наук, професор, професор кафедри електротехнічних систем та енергетичного менеджменту Центральноукраїнського національного технічного університету;
Володимир ПЕТРЕНЮК	кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри кібербезпеки та програмного забезпечення Центральноукраїнського національного технічного університету;
Дмитро ПЕТРЕНЮК	кандидат фізико-математичних наук, молодший науковий співробітник відділу економічної кібернетики Інституту кібернетики НАН України;
Антон РЯБЕНКО,	кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри «Системного аналізу та обчислювальної математики» НУ «Запорізька політехніка»;
Поліна СТЕГАНЦЕВА	кандидат фізико-математичних наук, професор, професор кафедри загальної математики Запорізького національного університету;
Дмитро ШИРОКОРАД	кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу та обчислювальної математики НУ «Запорізька політехніка»;
Громадські організації Системні дослідження; Міжнародний дослідницький центр вихрової енергетики; Українське фізичне товариство	

ЗМІСТ

Пленарні доповіді

Стецюк П.І., Хомяк

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України 12
О.М. ЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ
ПОТОКОРОЗПОДІЛУ РЕГІОНАЛЬНОЇ ЕНЕРГОСИСТЕМИ

Ігор Козін

Запорізький Національний університет 20
УЗАГАЛЬНЕНІ ПРАВИЛА ВИБОРУ ДЛЯ ВІДНОШЕНЬ
ПАРНОГО ДОМІНУВАННЯ

¹Марина Семенюта, ²Леонід Гуляницький

¹Центральноукраїнський національний технічний університет,
²Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України 23
МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З
АДИТИВНИМИ РОЗМІТКАМИ

Доповіді

Oleksiy Dovgoshey^{1,2}, Olga Rovenska³

¹Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU, Slovyansk,
Ukraine
²University of Turku, Turku, Finland 29

³Donbas State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine

KÖNIG'S INFINITY LEMMA FOR LOCALLY FINITE
ULTRAMETRIC SPACES GENERATED BY LABELED TREES

Zhanna Chernousova

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv
Polytechnic Institute" 33
SPECTRAL-ENTROPY ANALYSIS OF THE DYNAMICS AND
TRANSFORMATION OF ECONOMIC SYSTEMS: THE CASE OF
UKRAINE'S ENERGY SECTOR

Olha Kravchenko

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv
Polytechnic Institute" 37
MODELING THE TRANSMISSION OF FINANCIAL SHOCKS IN
NETWORKS OF INTERDEPENDENT MARKETS

Yurii Prokopchuk

Institute of Technical Mechanics of the NAS of Ukraine and SSA of
Ukraine 42
MEANING AS WHOLENESS EXPERIENCED

Volodymyr Riznyk, Maksym Hladchuk

Lviv Polytechnic National University 50
METHOD OF BIG VECTOR DATA PROCESSING

Marina Semeniuta

Central Ukrainian National Technical University
ON CLOSED DISTANCE MAGIC LABELING AND THE
FRACTIONAL DOMINATION NUMBER OF THE GRAPH $K_n \circ G$ 57

¹Sikirda Yu., ²Shmelova T., ³Syroizhka I.

^{1,3}*Ukrainian State Flight Academy*

²*National University "Kyiv Aviation Institute"*
NETWORK-BASED OPTIMIZATION OF COLLABORATIVE
DECISION-MAKING IN AIRCRAFT PRE-FLIGHT
MAINTENANCE 61

Володимир Бахрушин

Національний університет «Запорізька політехніка»
ЗАСТОСУВАННЯ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В
ЗАДАЧАХ ЗАХИСТУ ОБ'ЄКТІВ КРИТИЧНОЇ
ІНФРАСТРУКТУРИ ПРИФРОНТОВИХ МІСТ 68

Станіслав Ведмедєв, Еліна Терещенко

Національний університет «Запорізька політехніка»
МЕТОД ЦИФРОВОГО ФЕНОТИПУВАННЯ РОСЛИННИХ
ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ ЗОБРАЖЕНЬ 75

**Борис Вінтенко^{1,2}, Олексій Смірнов³, Ірина Миронець¹,
Тетяна Смірнова³,**

¹Черкаський державний технологічний університет, Черкаси,
Україна

² ПАТ “Науково-виробниче підприємство “Радій”, м.
Кропивницький, Україна 79

³ Центральноукраїнський національний технічний університет,
м. Кропивницький, Україна

МЕТОД ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ ПРОГРАМНИХ
КОМПЛЕКСІВ ПІДТРИМКИ ОПЕРАТИВНОГО ПЕРСОНАЛУ
АЕС

Олена Воловик

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
МОДИФІКАЦІЇ МОДЕЛЕЙ СТРУКТУРНО-ТЕХНОЛОГІЧНИХ
ЗМІН М. МИХАЛЕВИЧА 84

**Василь Горбачук, Максим Дунаєвський, Дмитро Ніколенко,
Лілія Товстенко**

Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України
ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МЕНЕДЖМЕНТУ
ЛАНЦЮГІВ ПОСТАЧАННЯ 90

Олександр Глухов

Київський авіаційний інститут
МУЛЬТИКАРКАСИ І ЗВ'ЯЗНІСТЬ КВАЗИВИПАДКОВИХ
ГРАФІВ 99

Людмила Джума, Амін Джума <i>Українська державна льотна академія</i>	
КОМБІНАТОРНІ ПІДХОДИ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПЛАНУВАННЯ ПОВІТРЯНИХ КОРИДОРІВ ДЛЯ ТРАНСПОРТНИХ БПЛА В МІСТІ	102
¹Максим Єгер, ²Петро Стецюк <i>¹Ужгородський національний університет</i>	
<i>²Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України</i>	106
ПОШУК ВСІХ ОПТИМАЛЬНИХ МАРШРУТІВ НАЙМЕНШОГО ЧАСУ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ «ВИННИХ ШЛЯХІВ»	
Олександр Єфанов, Анна Бакурова <i>Національний університет «Запорізька політехніка»</i>	
ГІПЕРГРАФОВА МОДЕЛЬ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ КРАЇН ЗА ІНДЕКСОМ ЕКОНОМІЧНОЇ СКЛАДНОСТІ З ІНТЕГРАЦІЄЮ ДАНИХ ПРО ТОВАРНУ СТРУКТУРУ ЕКСПОРТУ	112
Олексій Ізвалов <i>Економіко-технологічний інститут імені Роберта Ельворті</i>	
СОЦІАЛЬНИЙ ГРАФ УЧАСНИКІВ GLOBAL GAME JAM UKRAINE: ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ	116
Калашник Г.А., Калашник-Рибалко М.А. <i>Українська державна льотна академія</i>	
УДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДІВ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕНЬ МІСЦЕПОЛОЖЕННЯ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА ЗА ДАНИМИ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ	120
Ян Карпенко, Валерій Дубровін <i>Національний університет «Запорізька політехніка»</i>	
ДОСЛІДЖЕННЯ КВАНТОВОГО ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ ДОБЕШІ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ МЕРЕЖЕВИХ АТАК	127
Дмитро Картамишев <i>Донбаська державна машинобудівна академія</i>	
ПРОГРАМНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗВОРТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ ЯК ІНСТРУМЕНТ АНАЛІЗУ ЇХ ПОВЕДІНКИ	132
Руслан Коломосць, Валентина Турчина <i>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара</i>	
МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО ПЛАНУВАННЯ РЕСУРСІВ У ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ ЗА ДОПОМОГОЮ БІНАРНИХ РОЗГАЛУЖЕНЬ	139

- Вячеслав Корольов, Максим Огурцов,
Олександр Ходзінський, Олександр Ярушевський**
*Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,
Україна* 143
- МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА АЛГОРИТМІЧНЕ
ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ МІСЦІ ГРУПИ БПЛА,
ОСНАЩЕНИХ СПРЯМОВАНИМИ АНТЕНАМИ**
- Лариса Кривоблоцька, Ірина Годзюмаха**
Центральноукраїнський національний технічний університет
- ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ЛІНІЙНОГО
ПРОГРАМУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ
ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ** 150
- Сергій Кривий, Дарчук Н.П.**
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
- МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ ДОСЛІДНИКА З СИСТЕМОЮ
ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ** 156
- Сергій Кривий, Любов Гриднєва, Микола Носенко**
Київський Національний університет імені Тараса Шевченка
- ІТЕРАЦІЙНИЙ ЛОГІКО-ЛІНГВІСТИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ
ПРИРОДНОМОВНИХ ТЕКСТІВ** 162
- ¹Сергій Курапов, ²Максим Давидовський**
*¹Запорізький національний університет, ²КЗ «Запорізький
обласний інститут післядипломної педагогічної освіти» ЗОР*
- ІЗОМЕТРИЧНІ ЦИКЛИ НЕСЕПАРАБЕЛЬНОГО ГРАФА** 168
- Олексій Невєдров**
Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка
- ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ
МОДЕЛЕЙ ОБЧИСЛЮВАНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ
МЕРЕЖ ПЕТРІ** 172
- ¹Петренюк В. І., ²Петренюк Д. А.**
*¹Центральноукраїнський національний технічний університет,
²Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України*
- АЛГОРИТМ ВИЯВЛЕННЯ МІНОРІВ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА
СЕРЕД ГРАФІВ НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ 3,
СИНТЕЗОВАНИХ З МІНОРІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ,
ЯКІ МАЮТЬ ПІДГРАФ ГОМЕОМОРФНИЙ $K_{3,3}$** 179
- Іван Половко, Микола Маляр, Маріанна Шаркаді**
Ужгородський національний університет
- ВИКОРИСТАННЯ АПАРАТУ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ ДЛЯ
ОЦІНКИ ЯКОСТІ ВОДНИХ РЕСУРСІВ** 187
- Ірина Рясна, Олександр Сенько**
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
- МОДЕЛЮВАННЯ НЕЧІТКИХ КЛАСТЕРІВ НА ОСНОВІ
ЛІНГВІСТИЧНОЇ ЗМІННОЇ** 191

Семенова¹ Н. В., Колечкіна² Л. М., Колесніков¹ Д.С.	
<i>¹Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України;</i>	
<i>²Київський Національний Економічний Університет ім. Вадима Гетьмана</i>	196
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА НЕЧІТКИХ КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ ПЕРЕСТАНОВОК ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ	
Олексій Смірнов, Віктор Заріцкий, Костянтин Буравченко, Сергій Смірнов	
<i>Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Україна</i>	202
ПІДВИЩЕННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ЕФЕКТИВНОСТІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ОБЛИЧ ШЛЯХОМ GPU-ПРИСКОРЕННЯ БІБЛІОТЕКИ DLIB	
Валентина Турчина, Віталій Донець	
<i>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара</i>	205
ДВОКРИТЕРІАЛЬНА ЗАДАЧА ПАРАЛЕЛЬНОГО УПОРЯДКУВАННЯ ВЕРШИН ОРГРАФІВ	
Тимофієва Н. К.	
<i>Інститут інформаційних технологій та систем НАН України</i>	210
ПРО СИМЕТРІЮ В КОМБІНАТОРИЦІ ТА ЖИВІЙ ПРИРОДІ	
Микола Фесенко	
<i>Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України</i>	214
НОВА ТАКТИКА ГРИ ДЛЯ ДІЙ ДВОХ ФОРВАРДІВ ДЛЯ ГРИ РОБОТІВ У ШТРАФНІЙ ПЛОЩАДЦІ ФУТБОЛЬНОГО ПОЛЯ	
Ірина Філімоніхіна	
<i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i>	219
АЛГОРИТМИ ДЛЯ РОБОТИ З ГРАФАМИ	
Маріанна Шаркаді, Дора Сабов	
<i>ДВНЗ «Ужгородський національний університет»</i>	224
МОДЕЛЬ НЕЧІТКОГО ЛОГІЧНОГО ВИСНОВКУ ДЛЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЕКОЛОГІЧНОГО СТАНУ	
Михайло Соломко	
<i>Національний університет водного господарства та природокористування</i>	228
АБСТРАКТНИЙ МЕТОД СПРОЩЕННЯ ЛОГІЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ОСНОВІ ДИСТРИБУТИВНОГО ЗАКОНУ БУЛЕВОЇ АЛГЕБРИ	
Резолюція XXVIII Міжнародного науково-практичного семінару	241

ЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОТОКОРОЗПОДІЛУ РЕГІОНАЛЬНОЇ ЕНЕРГОСИСТЕМИ

Стецюк П.І., Хом'як О.М.

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

LINEAR MODEL FOR OPTIMIZATION OF FLOW DISTRIBUTION OF REGIONAL POWER SYSTEM

Abstract. The article presents a mathematical model for minimizing the power moment of the power grid, taking into account the capacity of power transmission lines, balance relations in the power supply nodes of the network and the load nodes. The mathematical model is represented by a linear programming problem, for which the properties of the solution and the compatibility conditions of the system of linear constraints of the problem are investigated. The results of calculations on the distribution of energy flows and the value of its efficiency (minimum power moment) for several variants of the functioning of a model power system with five power supply nodes and ten load nodes are presented.

Вступ. У статті [1] представлена математична модель мінімізації моменту потужності електромережі з урахуванням пропускної здатності ліній електропередач, балансових співвідношень у вузлах живлення мережі та вузлах навантаження регіональної енергосистеми. Математична модель представлена задачею цілочислового лінійного програмування, де цілочислові змінні є булевими та задають один із напрямів передачі потужностей по лініях електропередач у мережі.

Передача потужності між вузлами живлення магістральної мережі та вузлами навантаження розподільної мережі допускається у будь-якому напрямі за умови виконання першого закону Кірхгофа (сума потужностей, що надходить у вузол, дорівнює сумі потужностей, що з нього виходить) і дотримання обмежень пропускної здатності ліній електропередач.

Вхідні дані для модельної електроенергетичної мережі, яка включає п'ять вузлів живлення (множина A) та десять вузлів навантаження регіональної енергосистеми (множина B) наведені у Таблиці 1. Тут задано відповідні потужності магістральних вузлів A_i , $i=1, \dots, 5$ та попит у вузлах навантаження B_i , $i=1, \dots, 10$, а також відповідні довжини ліній електропередачі між вузлами. Для магістральних ліній електропередачі верхні межі на пропускні здатності встановлено на рівні 800 МВА (мегавольт-ампер, одиниця повної електричної потужності), а для ліній, що з'єднують вузли живлення та вузли навантаження, –180 МВА.

Таблиця 1. Параметри модельної електроенергетичної мережі

Вузли A	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅					
MBA	800	700	650	500	450					
Вузли B	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	B ₇	B ₈	B ₉	B ₁₀
MBA	250	630	400	250	160	160	250	250	500	250
ЛЕП	A ₁ A ₂	A ₂ A ₃	A ₃ A ₄	A ₄ A ₅	A ₅ A ₁	A ₁ B ₁	A ₁ B ₂	A ₁ B ₃	A ₁ B ₄	A ₁ B ₅
d_{ij}	35	70	50	25	65	13	7	9	15	20
ЛЕП	A ₂ B ₂	A ₂ B ₃	A ₂ B ₅	A ₂ B ₈	A ₂ B ₉	A ₃ B ₂	A ₃ B ₅	A ₃ B ₆	A ₃ B ₉	A ₃ B ₁₀
d_{ij}	12	15	5	20	15	22	15	20	6	11
ЛЕП	A ₄ B ₃	A ₄ B ₇	A ₄ B ₈	A ₄ B ₉	A ₄ B ₁₀	A ₅ B ₁	A ₅ B ₂	A ₅ B ₄	A ₅ B ₆	A ₅ B ₇
d_{ij}	25	18	6	17	10	7	17	3	18	13

Проведені у [1] розрахунки дозволили отримати направлені графи розподілу потоків енергії та значення ефективності цього розподілу за умови забезпечення нормальної роботи модельної електроенергетичної системи. Розглядався також варіант з повним знеструмленням вхідних ліній, що заживлюють вузол A_1 , але зі збереженням його працездатності, при незмінності лімітів вузлів A_2, A_3, A_4, A_5 . У роботі [2] математична модель задачі оптимізації уточнена на випадок оптимального перерозподілу потужності вузла A_1 (або будь-якого іншого) між іншими вузлами.

У статті [3] розроблено математичні моделі для балансування електроенергетичної системи з частковим та повним знеструмленнями окремих вузлів живлення магістральної мережі. Моделі представлено задачами змішаного булевого лінійного програмування, за допомогою яких можна як знаходити оптимальний потокорозподіл, так і виявляти «критичні» верхні межі на потужності між вузлами, коли забезпечити попит вузлів живлення розподільної мережі неможливо.

Мета роботи – спростити математичну модель зі статті [3] для мінімізації моменту потужності електроенергетичної системи з частковим знеструмленням окремих вузлів живлення. Модель представлено задачею лінійного програмування (ЛП-задача), формулювання якої наведемо для загального випадку транспортних задач, де A – множина постачальників (вузлів живлення), B – множина споживачів (вузлів навантаження).

Формулювання ЛП-задачі. Нехай A – множина постачальників, B – множина споживачів, n_A – кількість постачальників, n_B – кількість споживачів.

Для кожного постачальника $i \in A$ заданий наявний у нього обсяг продукції a_i^0 . Також задано Z_A – сумарний обсяг продукції, який може бути додатково розподілений між постачальниками. Будемо вважати, що

постачальнику $i \in A$ може бути додано обсяг продукції не менший ніж z_i^{low} (нижня межа) та не більший ніж z_i^{up} (верхня межа).

Для кожного споживача $j \in B$ задана потреба в продукції b_j (необхідна продукція), яка задається в тих же одиницях, що і обсяги продукції у постачальників.

Нехай $E_{AA} \subset A \times A$ – множина ребер, яка задає зв'язки між постачальниками, а $E_{AB} \subset A \times B$ – множина ребер, яка задає зв'язки між постачальниками та споживачами, m_{AA} – кількість ребер E_{AA} , m_{AB} – кількість ребер E_{AB} .

Для кожного ребра ij задано вартості передавання одиниці потоку $d_{ij}^{AA} = d_{ji}^{AA}$, $ij \in E_{AA}$ та $d_{ij}^{AB} = d_{ji}^{AB}$, $ij \in E_{AB}$ і верхні границі $x_{ij}^{up} = x_{ji}^{up}$, $ij \in E_{AA}$ та $y_{ij}^{up} = y_{ji}^{up}$, $ij \in E_{AB}$ для потоків, які можна передавати або дугою ij або дугою ji .

Задача полягає у знаходженні мінімальної сумарної вартості передавання потоків у мережі за умов дотримання верхніх обмежень на обсяги потоків, повного використання продукції постачальників, та максимального забезпечення необхідних потреб споживачів.

Нехай змінні $x_{ij}^+ \geq 0$, $x_{ij}^- \geq 0$, $i, j \in A$, $ij \in E_{AA}$ – невідомі обсяги потоків між постачальниками, а змінні $y_{ij}^+ \geq 0$, $y_{ij}^- \geq 0$, $i \in A$, $j \in B$, $ij \in E_{AB}$ – невідомі обсяги між постачальниками та споживачами. Знаки “+” та “-” позначають напрям потоку від вершини i до вершини j та від вершини j до вершини i .

Нехай змінні $z_i \geq 0$ – невідомі значення доданих обсягів продукції для постачальників $i \in A$, сума яких є рівною Z_A . Вони задовольняють умовам $z_i^{low} \leq z_i \leq z_i^{up}$, де z_i^{low} та z_i^{up} – задані нижні та верхні межі на управління доданими обсягами продукції для постачальників $i \in A$.

Нехай змінні $u_{ij} \geq 0$, $ij \in E_{AA}$ та $v_{ij} \geq 0$, $ij \in E_{AB}$ – невідомі обсяги продукції, які будемо додавати до верхніх меж на потоки для ребер E_{AA} та E_{AB} . Додатні штрафні коефіцієнти P_{AA} та P_{AB} будемо використовувати для виявлення «вузьких місць» у мережі, коли передавання обсягів потоків у мережі забезпечити неможливо.

Нехай $z = \{z_i\}_{i \in A}$, $x = \{x_{ij}^+, x_{ij}^-\}_{ij \in E_{AA}}$, $y = \{y_{ij}^+, y_{ij}^-\}_{ij \in E_{AB}}$, $u = \{u_{ij}\}_{ij \in E_{AA}}$, $v = \{v_{ij}\}_{ij \in E_{AB}}$. Тоді задача знаходження мінімальної сумарної вартості пересилання потоків в мережі формулюється як задача лінійного програмування (ЛП-задача): знайти

$$F^* = \min_{z,x,y,u,v} \left\{ F = \sum_{ij \in E_{AA}} (d_{ij}^{AA} (x_{ij}^+ + x_{ij}^-) + P_{AA} u_{ij}) + \sum_{ij \in E_{AB}} (d_{ij}^{AB} (y_{ij}^+ + y_{ij}^-) + P_{AB} v_{ij}) \right\} \quad (1)$$

за обмежень

$$\sum_{j:ij \in E_{AA}} (x_{ij}^+ - x_{ij}^-) - \sum_{j:ji \in E_{AA}} (x_{ji}^+ - x_{ji}^-) + \sum_{j:ij \in E_{AB}} (y_{ij}^+ - y_{ij}^-) = a_i^0 + z_i, \quad \forall i \in A, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in A} z_i = Z_A, \quad z_i^{low} \leq z_i \leq z_i^{up}, \quad i \in A, \quad (3)$$

$$\sum_{i:ij \in E_{AB}} (y_{ij}^+ - y_{ij}^-) \leq b_j, \quad \forall j \in B, \quad (4)$$

$$x_{ij}^+ \leq x_{ij}^{up} + u_{ij}, \quad x_{ij}^- \leq x_{ij}^{up} + u_{ij}, \quad i, j \in A, \quad ij \in E_{AA}, \quad (5)$$

$$y_{ij}^+ \leq y_{ij}^{up} + v_{ij}, \quad y_{ij}^- \leq y_{ij}^{up} + v_{ij}, \quad i \in A, \quad j \in B, \quad ij \in E_{AB}, \quad (6)$$

$$x_{ij}^+ \geq 0, \quad x_{ij}^- \geq 0, \quad u_{ij} \geq 0, \quad i, j \in A, \quad ij \in E_{AA}, \quad (7)$$

$$y_{ij}^+ \geq 0, \quad y_{ij}^- \geq 0, \quad v_{ij} \geq 0, \quad i \in A, \quad j \in B, \quad ij \in E_{AB}. \quad (8)$$

Тут $F(x, y, u, v)$ – цільова функція (1) є лінійною та описується двома складовими $F(x, y, u, v) = M(x, y) + P(u, v)$, де функції $M(x, y)$ та $P(u, v)$ такі:

$$M(x, y) = \sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA} (x_{ij}^+ + x_{ij}^-) + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB} (y_{ij}^+ + y_{ij}^-), \quad P(u, v) = \sum_{ij \in E_{AA}} P_{AA} u_{ij} + \sum_{ij \in E_{AB}} P_{AB} v_{ij}.$$

Перша складова – сумарна вартість передавання потоків у мережі, а друга складова це штрафи за корекції верхніх меж на потоки. За допомогою першої складової можна мінімізувати вартість передавання потоків в мережі (момент потужності в електроенергетичних задачах), а за допомогою другої можна визначити на скільки потрібно збільшити верхні границі на передавання потоків, якщо система обмежень (2) – (8) є несумісною.

Лінійні рівності (2) означають, що кожен із постачальників повинен передати споживачам увесь обсяг продукції, що включає як його власні наявні ресурси, так і частину продукції, отриманої за рахунок розподілу Z_A одиниць продукції між усіма постачальниками. За цей розподіл відповідають обмеження (3): щоб постачальник i отримав заданий обсяг продукції \bar{z}_i , достатньо встановити однаковими нижню та верхню межі $z_i^{low} = z_i^{up} = \bar{z}_i$.

Лінійні нерівності (4) означають, що кожен із споживачів може недоотримати необхідний обсяг продукції.

Лінійні нерівності (5) означають, що передавати потоки по ребрах E_{AA} дозволяється, не порушуючи при цьому верхніх меж на обсяги потоків. Лінійні нерівності (6) означають теж саме, але для множини ребер E_{AB} .

Лінійні нерівності (7) задають умови на невід'ємність змінних $x = \{x_{ij}^+, x_{ij}^-\}$ та $u = \{u_{ij}\}$ для всіх $ij \in E_{AA}$, а лінійні нерівності (8) – на невід'ємність змінних $y = \{y_{ij}^+, y_{ij}^-\}$ та $v = \{v_{ij}\}$ для всіх $ij \in E_{AB}$.

Властивості ЛП-задачі. Задача (1) – (8) є задачею лінійного програмування. Кількість змінних дорівнює $n = n_A + 3(m_{AA} + m_{AB})$, а кількість обмежень, не враховуючи обмежень (7) та (8), дорівнює $m = 3n_A + n_B + 2(m_{AA} + m_{AB}) + 1$.

Нехай $z^* = \{z_i^*\}_{i \in A}$, $x^* = \{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AA}}$, $y^* = \{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AB}}$, $u^* = \{u_{ij}^*\}_{ij \in E_{AA}}$, $v^* = \{v_{ij}^*\}_{ij \in E_{AB}}$ – розв'язок задачі (1) – (8).

Твердження 1. Для $x^* = \{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AA}}$ та $y^* = \{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AB}}$ справедлива така рівність

$$\sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA} \min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\} + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB} \min\{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\} = 0. \quad (9)$$

Рівність (9) гарантує, що оптимальні потоки по ребрах E_{AA} та E_{AB} передаються тільки в одному напрямі.

Якщо структура мережі така, що від кожного із постачальників існує принаймні один шлях до кожного із споживачів, то справедливе таке твердження.

Твердження 2. Якщо виконуються такі умови:

$$1) \sum_{i \in A} z_i^{low} \leq Z_A \leq \sum_{i \in A} z_i^{up}, \quad 2) Z_A + \sum_{i \in A} a_i^0 \leq \sum_{j \in B} b_j,$$

то система обмежень (2) – (8) є сумісною.

Тут умова 1) означає, що весь сумарний обсяг продукції Z_A може бути розподілений між постачальниками, тобто він повинен бути не менший за суму нижніх меж на додані обсяги продукції для всіх постачальників та не більший за суму верхніх меж; умова 2) означає, що у постачальників продукції не більше, ніж її потребують споживачі.

Якщо виконується твердження 2, то задача (1) – (8) має розв'язок, але він може не задовольняти верхні межі на передавання потоків. Це буде залежати від вибору штрафних коефіцієнтів P_{AA} та P_{AB} та може мати місце як при малих значеннях штрафних коефіцієнтів, коли передавання обсягів потоків у мережі можна задовольнити, так і при великих значеннях штрафних коефіцієнтів, коли передавання обсягів потоків в мережі неможливо задовольнити через занижені верхні межі на обсяги потоків по ребрах. Розрізніти ці два випадки дозволяє таке твердження.

Твердження 3. Нехай система обмежень (2) – (8) є сумісною, а штрафні коефіцієнти $P_{AA} = P_{AB} = \sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA} + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB}$. Якщо $P^* = 0$, то (x^*, y^*, z^*) – розв’язок задачі (1) – (8), який задовольняє верхні межі на обсяги потоків по ребрах мережі. Якщо $P^* > 0$, то серед компонент векторів u^* та v^* є хоча би одна додатна компонента і задача (1) – (8) не має розв’язку, який задовольняє верхні межі на обсяги потоків у мережі.

Якщо значення штрафних коефіцієнтів вибрані не меншими ніж у твердженні 3, то додатні компоненти векторів u^* та v^* визначають такі обсяги потоків, які потрібно додати до верхніх меж на обсяги потоків у мережі, щоб для них задача (1) – (8) мала розв’язок.

Обчислювальний експеримент. Розглядався тестовий приклад модельної електроенергетичної мережі з [1], параметри для якого наведені у таблиці 1. Розв’язання відповідних задач оптимізації виконувалось за допомогою солвера Gurobi [4], який доступний на NEOS сервері [5]. Для опису задач лінійного програмування було використано мову моделювання AMPL (A Mathematical Programming Language) [6].

Експеримент пов’язаний зі знаходженням розподілів потоків потужності та значення їх ефективності (мінімальний момент потужності) для нормальної роботи модельної електроенергетичної системи (варіант 1) та трьох різних варіантів знеструмлення вузлів живлення. Варіант 2 пов’язаний зі знеструмленням вузла живлення A_1 , варіант 3 – вузла A_2 , варіант 4 – вузла A_3 (вузол живлення не може отримувати енергію, але через нього її можна передавати). При цьому потужності знеструмлених вузлів розподіляються між задіяними вузлами.

Результати розрахунків наведено в таблицях 2 та 3. В таблиці 2 представлено отримані для всіх чотирьох варіантів обсяги електроенергії для вузлів живлення та мінімальні моменти потужності, які відповідають цим варіантам. Для варіантів 2, 3 та 4 жирним шрифтом виділено обсяги потужностей знеструмлених вузлів живлення, перерозподілені між іншими вузлами.

Таблиця 2. Обсяги електроенергії вузлів живлення для чотирьох варіантів

Вузли	Варіант 1 ($M^* = 40020$)	Варіант 2 ($M^* = 48930$)	Варіант 3 ($M^* = 50050$)	Варіант 4 ($M^* = 49250$)
A_1	800	0	820=800+ 20	800
A_2	700	880=700+ 180	0	790=700+ 90
A_3	650	650	650	0
A_4	500	690=500+ 190	750=500+ 250	750=500+ 250
A_5	450	880=450+ 430	880=450+ 430	760=450+ 310

В таблиці 3 наведено розподіли потоків потужності як між вузлами живлення так і між вузлами живлення та навантаження.

Таблиця 3. Розподіл потоків потужності в енергосистемі для чотирьох варіантів

ЛЕП			Варіант 1		Варіант 2		Варіант 3		Варіант 4	
	хup	dAA	x(+)	x(-)	x(+)	x(-)	x(+)	x(-)	x(+)	x(-)
A ₁ A ₂	800	35	0	0	0	90	160	0	0	0
A ₂ A ₃	800	70	0	0	0	0	0	0	0	0
A ₃ A ₄	800	50	0	0	0	0	0	0	0	100
A ₄ A ₅	800	25	0	0	0	0	0	0	0	0
A ₅ A ₁	800	65	0	0	0	0	0	0	0	0
	yup	dAB	y(+)	y(-)	y(+)	y(-)	y(+)	y(-)	y(+)	y(-)
A ₁ B ₁	180	13	180	0	70	0	70	0	180	0
A ₁ B ₂	180	7	180	0	90	0	180	0	180	0
A ₁ B ₃	180	9	180	0	40	0	180	0	180	0
A ₁ B ₄	180	15	180	0	70	0	70	0	100	0
A ₁ B ₅	180	20	80	0	0	180	160	0	160	0
A ₂ B ₂	180	12	180	0	180	0	90	0	180	0
A ₂ B ₃	180	15	180	0	180	0	40	0	180	0
A ₂ B ₅	180	5	80	0	180	0	0	180	180	0
A ₂ B ₈	180	20	80	0	70	0	70	0	70	0
A ₂ B ₉	180	15	180	0	180	0	140	0	180	0
A ₃ B ₁₀	180	11	170	0	130	0	110	0	70	0
A ₃ B ₂	180	22	140	0	180	0	180	0	90	0
A ₃ B ₅	180	15	0	0	160	0	180	0	0	180
A ₃ B ₆	180	20	160	0	0	0	0	0	0	20
A ₃ B ₉	180	6	180	0	180	0	180	0	140	0
A ₄ B ₁₀	180	10	80	0	120	0	140	0	180	0
A ₄ B ₃	180	25	40	0	180	0	180	0	40	0
A ₄ B ₇	180	18	70	0	70	0	70	0	70	0
A ₄ B ₈	180	6	170	0	180	0	180	0	180	0
A ₄ B ₉	180	17	140	0	140	0	180	0	180	0
A ₅ B ₁	180	7	70	0	180	0	180	0	70	0
A ₅ B ₂	180	17	130	0	180	0	180	0	180	0
A ₅ B ₄	180	3	70	0	180	0	180	0	150	0
A ₅ B ₆	180	18	0	0	160	0	160	0	180	0
A ₅ B ₇	180	13	180	0	180	0	180	0	180	0

З таблиці 3 видно, що для варіанту 2 є два «мінусових» потоки (90 МВА від A₂ до A₁ та 180 МВА від B₅ до A₁). Для варіанту 3 є один «мінусовий» потік (180 МВА від B₅ до A₁), а для варіанту 4 – три

«мінусових» потоки (100 МВА від A_4 до A_3 , 180 МВА від B_5 до A_3 , 20 МВА від B_6 до A_3).

Висновки. У статті наведено математичну модель для розрахунку різних варіантів роботи електроенергетичної системи з частковим знеструмленням окремих вузлів живлення електромережі. Модель представлено у вигляді задачі лінійного програмування, де мінімізується момент потужності енергосистеми з урахуванням пропускної здатності ліній електропередач та рівнів навантажень енергетичних вузлів. Наведено результати розрахунків щодо розподілу потоків енергії та значення його ефективності (мінімальний момент потужності) для декількох варіантів функціонування модельної електроенергетичної системи з п'ятьма вузлами живлення та десятьма вузлами навантаження.

Розроблена математична модель може бути використана для балансування регіональних енергосистем за непередбачуваних пошкоджень енергетичної інфраструктури та виникненням при цьому некерованого дефіциту потужності [1]. За її допомогою можна знаходити оптимальні поточкорозподіли в електроенергетичній мережі та виявляти критичні значення пропускних здатностей ребер, при яких забезпечити передавання потоків неможливо. Це сприятиме виробленню своєчасних управлінських рішень для систем диспетчеризації центрального та регіонального рівнів на формування адекватних реакцій та сценаріїв забезпечення живучості регіональних енергосистем [7].

Подяка. Робота підтримана проектом 2.3/26-П НАН України.

Література

1. Kaplun V., Gai O., Stetsyuk P., Ivlichev A. Provision of optimal dispatching scenarios for regional power systems in the face of uncontrollable power shortages. *Machinery & Energetics*. 2023. 14(2). P. 23–33. <https://doi.org/10.31548/machinery/2.2023.23>
2. Каплун В., Войтенко В., Стецюк П., Хом'як О. Балансування мікроенергосистем з адресним поточкорозподілом потужності та мінімізацією втрат електроенергії. У: Цифрові технології в енергетиці і автоматичі: зб. тез доп. III міжнар. наук.-практ. конф. Київ, 6 червня 2025 р. С. 23–25.
3. Стецюк П.І., Хом'як О.М. Оптимізаційні моделі балансування регіональної енергосистеми за умов знеструмлення магістральних вузлів. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2025. No 6. С. 35–45. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.035>
4. Gurobi Optimization, Inc., Gurobi Optimizer Reference Manual, 2014. <http://www.gurobi.com/> (Дата звернення: 10.04.2026).
5. NEOS Solver. <https://neos-server.org/> (Дата звернення: 10.04.2026)
6. Fourer R., Gay D., Kernighan B. *AMPL, A modeling language for mathematical programming*. 2003. Belmont: Duxbury Press. 526 p.

7. Kaplun V., Trokhaniak V., Makarevych S., Radko I., Lytvyn V. Structuring the energy balance of territorial communities with local infrastructure assets for combined energy production. *Machinery & Energetics*, 2024. 15(4), 22-33. <https://doi.org/10.31548/machinery/4.2024.22>

УЗАГАЛЬНЕНІ ПРАВИЛА ВИБОРУ ДЛЯ ВІДНОШЕНЬ ПАРНОГО ДОМІНУВАННЯ

Ігор Козін

Запорізький Національний університет

GENERAL RULES OF SELECTION FOR COUPLE- DOMINATION RELATIONSHIPS

Igor Kozin

Zaporizhzhia National University

Abstract. The problem of generalizing classical voting rules to arbitrary election rules based on the pairwise dominance relation is considered. Generalizations of well-known rules are obtained: Condorcet, Copeland, Simpson, and other rules. The properties of these rules are investigated.

Правила голосування ґрунтуються на дуже простому принципі – принципі більшості, який стверджує, що якщо з двох альтернатив A і B більше половини агентів надають перевагу альтернативі A , то вона має бути обрана за цим правилом. Будь-яке правило, що задовольняє принцип більшості, є узагальненням цього принципу на число альтернатив, більше двох.

Задача ухвалення рішення для випадку голосування може розглядатися як окремий випадок задачі багатокритеріального вибору на кінцевій множині альтернатив $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. А саме: задано N агентів, кожен з яких має критерій $F_i(x): X \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$, де значення цільової функції i -го агента $F_i(x)$ – це номер альтернативи x у порядку зменшення переваг цього агента.

Правила голосування можуть бути узагальнені для правил ухвалення рішення, узгоджених з довільним ставленням парнодомінування \prec на кінцевій множині X .

Відношення парнодомінування на кінцевій множині X може бути задано орієнтованим графом, вершини якого представляють можливі варіанти вибору рішення і вершина a з'єднана дугою з вершиною b в тому і тільки в тому випадку, коли $a \prec b$. Якщо всім пар (a, b) , у яких $a \neq b$, справедливо одне і лише одне із двох тверджень $a \prec b$ або $b \prec a$, це відношення називатимемо повним. Граф повного відношення

продомінування є турніром, тобто його носієм є повний граф K_n , де n число варіантів вибору. Іноді відношення $a < b$ має числову характеристику $\varphi(a, b)$ (ступінь домінування). У цьому випадку, граф, що представляє відношення, буде зваженим, кожній дузі, що відповідає відношенню $a < b$, буде приписана вага $\varphi(a, b)$.

Означення 1. Циклом Кондорсе називається така підмножина $A \subseteq X$, що

$$\forall x \in A, \exists x_1, x_2, \dots, x_k \Rightarrow x < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x$$

Теорема 1. Для будь-якого повного відношення парнодомінування існує цикл Кондорсе.

Означення 2. Узагальнене правило Кондорсе. Для повного відношення як безліч оптимальних рішень вибирається цикл Кондорсе. У разі, коли цикл Кондорсе складається з єдиної точки, приходимо до класичного правила Кондорсе.

Розглянемо інші правило вибору на базі відношення парнодомінування.

Означення 2. Узагальнене правило Копленда. Для орієнтованого графа визначимо алгебраїчний ступінь вершини, як різницю числа вхідних і вихідних дуг. Вибираються ті елементи множини X , для яких алгебраїчний ступінь відповідних їм вершин у графі G відношення парнодомінування $<$ є максимальним.

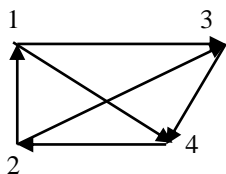


Рис.1

Приклад, наведений на рис.1, показує, що у випадку результати застосування правила Кондорсе і Копленда різні. Позначимо через $K_n(X)$ – множину елементів, оптимальних за правилом Кондорсе, а через $Kp(X)$ – множину елементів X , оптимальних за правилом Копленда. Тоді $K_n(X) = \{1, 2, 3, 4\}$, а $Kp(X) = \{3, 4\}$

Теорема 2. Якщо існує єдиний елемент, оптимальний за Кондорсе, то результат застосування правила Копленда та Кондорсе буде однаковим.

Теорема 3. Множина оптимальних за Коплендом елементів міститься в циклі Кондорсе.

Нехай тепер граф G , який представляє повне відношення парнодомінування, є зваженим графом, тобто кожній існуючій у графі G дузі, що з'єднує вершину i з вершиною j , поставлено у відповідність позитивне число w_{ij} – вага цієї дуги. Це число у графі відношення можна інтерпретувати як ступінь переваги вершини j над вершиною i . Будемо припускати, що немає елементів, котрим одночасно $x < y$ і $y < x$, тобто у графі G немає орієнтованих циклів довжини 2. Доповним множини ваг $\{w_{ij}\}$ до квадратної матриці, поклавши $w_{ji} = -w_{ij}$. Покладемо $W = \max_{i,j} w_{ij}$.

Означення 3. Оцінкою Сімпсона для вершини і називається величина

$$S_i = \min_j \left\{ 1 + \frac{w_{ji}}{W} \right\}.$$

Означення 4. Узагальнене правило Сімпсона. Узагальненим правилом Сімпсона називається правило вибору, яке на множині X з виваженим відношенням парнодомінування вибирає елемент з максимальною оцінкою Сімпсона.

Теорема 4. Якщо існує єдиний елемент у циклі Кондорсе, то він також вибирається за правилом Сімпсона.

Позначимо через $\Gamma = \{g\}$ групу перетворень множини X . Група Γ зберігає задане відношення парнодомінантності, якщо з умови $x \prec y$ випливає, що $\forall g \in \Gamma \quad g(x) \prec g(y)$. Якщо X – кінцева множина, то відношення парнодомінування може бути задано орієнтованим графом G , вершинами якого є елементи множини X , а дуги відповідають наявності відношення \prec між елементами. Група Γ можна розглядати як підгрупу групи перестановок вершин графа. Умова інваріантності відношення щодо відображень групи Γ рівнозначна умові: Γ є підгрупою групи автоморфізмів графа G .

Таким чином, дослідження властивостей симетрії відношення зводиться до дослідження групи автоморфізмів графа G .

Теорема 5. Нехай узагальнене правило Сімпсона, що побудовано на базі антисиметричної матриці $a = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ має вигляд

$$\min_j \left\{ 1 + \frac{2a_{ji}}{\sum_{k,l=1}^n |a_{kl}|} \right\} \rightarrow \max.$$

Група перетворень, що зберігають це правило вибору, складається з усіх перетворень виду $a_{ij} \rightarrow \text{sign}(a_{ij})\varphi(|a_{ij}|)$, де $\varphi(t)$ - довільна монотонно зростаюча функція однієї змінної.

Література

1. Moulin H. (1983) The strategy of social choice. Advanced Textbooks in Economics - Amsterdam, New York, Oxford: North Holland publishing company. - №18. -214p

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З АДИТИВНИМИ РОЗМІТКАМИ

Марина Семенюта¹, Леонід Гуляницький²

*Центральноукраїнський національний технічний університет¹,
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України²*

MODELS AND METHODS OF SOLVING PROBLEMS WITH ADDITIVE LABELINGS

Marina Semeniuta¹, Leonid Hulianytskyi²

*Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi,
Ukraine¹,*

*V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of
Sciences of Ukraine, Ukraine²*

Abstract. The paper initiates the systematization of methods for solving graph labeling problems. A unified scheme for describing additive labelings is proposed, and on its basis the stages of their investigation are identified. Using examples of distance magic and distance antimagic labelings for circulant graphs and Hamming graphs, the implementation of this scheme and the interrelation of analytical, combinatorial, and algebraic methods are demonstrated

У теорії адитивних розміток графів досліджуються задачі існування, побудови, переліку та конструктивного переліку розміток, а також задачі визначення величин, що задаються умовами розмітки. Задачі існування пов'язані з встановленням того, чи допускає заданий граф або клас графів відповідну розмітку. Побудова полягає в явному заданні розмітки, що задовольняє необхідні умови. Перелік розміток охоплює опис або підрахунок усіх допустимих розміток, тоді як конструктивний перелік вимагає задання процедури їх породження. Визначення величин стосується знаходження параметрів, які виникають в умовах розмітки або задаються ними, зокрема магічних сталих, мінімального розмаху міток та інших числових характеристик. Для різних типів розміток сформувалися спеціалізовані підходи до розв'язування зазначених задач, інструментарій яких розвивається відповідно до специфіки накладених умов, структурних особливостей графів та способів формалізації відображень.

Магічні та антимагічні розмітки, що належать до адитивного типу, здебільшого досліджуються через формалізацію умов у вигляді систем лінійних рівнянь і/або нерівностей над цілими числами, аналіз властивостей вкладених підграфів; встановлення обмежень на графові параметри, а також конструктивні побудови, що базуються на розкладах графів та комбінаторних конфігураціях [1-6]. Для розміток, орієнтованих на метричні властивості графів, застосовують інструменти спектрального та комбінаторного аналізу [7-10]. Групові варіанти, у яких мітки набувають значень у скінченних абелевих групах, вивчають із залученням апарату теорії груп та алгебраїчної теорії графів [11-14].

Попри різноманітність формальних підходів, усі зазначені напрями допускають єдину схему опису. Розмітка задається відображенням $f: X \rightarrow W$, $X \in \{V(G), E(G), V(G) \cup E(G)\}$, де W є числовою множиною або скінченною абелевою групою. Умови розмітки сформулюємо у вигляді $\sigma_i(f) = \sum_{x \in A_i} f(x)$, де множини A_i задаються типом розмітки: околиці вершин, інцидентні елементи, метрично визначені підмножини або їх комбінації, тощо. Відмінність між класами адитивних розміток полягає у характері обмежень на значення $\sigma_i(f)$: сталість, попарна відмінність або виконання порівнянь у таких алгебраїчних структурах, як групи, кільця. Таке подання зводить різні задачі до спільної проблеми: побудови відображення f , для якого система умов на значення $\sigma_i(f)$ є виконаною. Відмінності між підкласами розміток у цій схемі визначаються лише структурою множин A_i та типом обмежень на відповідні суми, тоді як сам механізм побудови або дослідження розмітки зводиться до аналізу цієї системи умов. Водночас автономність інструментарію, що склалася історично, ускладнює перенесення прийомів для дослідження різних типів розміток і залишає спільні закономірності поза увагою. Тому виникає потреба в систематизації методів саме на рівні цієї узагальненої моделі, де різні класи розміток відрізняються лише параметрами задачі, а не її принциповою структурою.

В теорії розміток графів відсутня систематизована класифікація методів розв'язування наведених вище типів задач. Тому зосередимо увагу на комбінаторних, алгебраїчних та аналітичних підходах дослідження адитивних розміток, які в більшості випадків застосовується у взаємозв'язку. Комбінаторні підходи використовуються переважно для побудови, перебору та класифікації конфігурацій міток, що задовольняють умови розмітки; алгебраїчні – для встановлення співвідношень між мітками, параметрами графу та величинами $\sigma_i(f)$; аналітичні – для отримання оцінок і обмежень у випадках, коли точна конструкція або повний опис множини розв'язків є складними або невідомими. Незалежно від типу задачі узагальнимо етапи їх розв'язування:

- 1) формалізація умов розмітки через співвідношення на величини $\sigma_i(f)$, що визначаються структурою множини A_i та типом розмітки; на цьому етапі формується аналітична модель задачі, яка є спільною основою для подальшого застосування різних методів;
- 2) виведення структурних наслідків із системи умов;
- 3) спрощення системи умов, що приводить до зменшення розмірності задачі або до еквівалентних задач на інших комбінаторних чи алгебраїчних об'єктах
- 4) аналіз сумісності отриманих співвідношень;
- 5) побудова розмітки, опис множини розв'язків або доведення неможливості їх існування.

Реалізацію наведеної схеми продемонструємо на прикладі циркулянтних графів, оскільки їхня регулярність і циклічна структура індексів вершин забезпечують прозоре відстеження кожного етапу.

Приклад 1. Розглянемо циркулянтний граф $C(n; S)$ з породжуючою множиною $S = \{1, 2, \dots, r\}$, де n – порядок графу. Нехай $V((n; S)) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, а індекси вершин обчислюються за модулем n . Вершина u_i суміжна з вершиною $u_{i \pm j}$, де $j \in \{1, \dots, r\}$ і $r < n/2$, тому граф $C(n; S)$ є $2r$ -регулярним. Розв'яжемо задачі існування та побудови його дистанційної магічної розмітки, тобто потрібно з'ясувати, за яких умов існує бієктивне відображення: $f: X \rightarrow W$, $X = V(C(n; S))$, $W = \{1, 2, \dots, n\}$, для якого сума міток у відкритому околі кожної вершини є сталою, і побудувати таку розмітку у випадку її існування. Позначимо: $f(u_i) = f_i$.

Перший етап полягає у формалізації умови розмітки. Тут використовується аналітичний метод, оскільки означення дистанційної магічності переводиться у систему рівнянь. Для кожної вершини u_i її вага має вигляд $w(u_i) = \sigma_i(f) = \sum_{j=1}^r (f_{i+j} + f_{i-j})$. Умова дистанційної магічності вимагає, щоб $\sigma_i(f) = k$ для всіх i . Оскільки граф $C(n; S)$ є $2r$ -регулярним, магічна стала визначається через суму всіх міток: $k = r(n + 1)$. Отже, отримали систему n лінійних рівнянь з циклічними індексами.

На другому використаємо комбінаторно-алгебраїчний метод. Порівнюємо ваги сусідніх вершин. Оскільки всі ваги однакові, маємо $w(u_i) = w(u_{i+1})$. Після скорочення однакових доданків одержуємо співвідношення $f_{i-r} + f_{i+1} = f_i + f_{i+r+1}$. Воно показує, що суми певних пар міток не є довільними, а підпорядковуються циклічній структурі індексів. Введемо допоміжну послідовність $f_i + f_{i+r+1} = c_i$. Далі використаємо метод циклічних зсувів індексів: із отриманих співвідношень випливає, що значення c_i повторюються за класами лишків. Якщо $a = \text{НСД}(n, r)$, то послідовність c_i має період a . Тобто індекси вершин розбиваються на a класів лишків, і в кожному такому класі відповідні парні суми міток є сталими.

Третій етап полягає у спрощенні системи умов. Використаємо алгебраїчні методи, зокрема методи теорії чисел і арифметики лишків. Замість початкової системи з n рівнянь розглянемо співвідношення між класами індексів. Додавання рівнянь $f_i + f_{i+r+1} = c_i$ за всіма індексами $i = 0, 1, \dots, n - 1$ дає умову на суму: $\sum_{i=0}^a c_i = a(n + 1)$, оскільки кожна мітка з множини $\{1, 2, \dots, n\}$ входить у ліву частину рівно двічі. Отримали співвідношення, яке пов'язує значення c_i із сумою всіх міток.

Подальший аналіз виконаємо у кільці лишків Z_n . Розглянемо підгрупу, породжену елементом $r + 1$. Саме ця алгебраїчна структура описує, як індекси переходять один в один у співвідношенні $f_i + f_{i+r+1} = c_i$. У результаті отримаємо необхідну умову існування розмітки: $a(r + 1) \equiv 0 \pmod{n}$, де $a = \text{НСД}(n, r)$. Отже, задача існування розмітки зводиться до перевірки арифметичної умови на параметри n і r .

Четвертий етап полягає у побудові розмітки. Тут застосуємо комбінаторний метод, поєднаний з алгебраїчним методом розбиття індексів на суміжні класи. За умови $a(r+1) \equiv 0 \pmod{n}$, множина індексів розбивається на суміжні класи, пов'язані з підгрупою $(r+1)$ у Z_n . Кожний індекс подаємо у формі $i = x_i(r+1) + y_i$, де $x_i \geq 0$, $0 \leq y_i < a$. На основі цього розбиття задаємо бієктивне відображення $f(u_i) = a^{(x_i+y_i) \bmod n}_{y_i}$. Його побудова організована так, щоб для кожного індексу i сума $f_i + f_{i+r+1}$ залежала лише від класу y_i . Саме це забезпечує сталість відповідних парних сум.

На п'ятому етапі здійснимо перевірку побудованої. Для вершини u_i маємо $w(u_i) = \sum_{j=1}^r (f_{i+j} + f_{i-j})$. Оскільки парні суми вже впорядковані за класами лишків, ця сума перетворюється на $w(u_i) = \sum_{j=1}^r c_{i-j}$. Кожен клас лишків враховується однаково кількість разів, тому $w(u_i) = \frac{r}{a} \sum_{t=0}^{a-1} c_t = r(n+1)$. Отже, вага кожної вершини не залежить від i і дорівнює магичній сталій. Це доводить, що побудоване відображення f є дистанційною магичною розміткою графу $C(n; S)$.

У прикладі 1 природно поєднуються аналітичні, комбінаторні та алгебраїчні методи на різних етапах дослідження, причому кожен з них використовується не як спеціалізований інструмент саме теорії розміток, а як відомий загальноматематичний метод, адаптований до умов задачі. Водночас в теорії розміток графів ці підходи часто набувають специфічної форми, пов'язаної безпосередньо зі структурою розміток і способами організації міток. Зокрема, застосовуються спеціальні конфігурації, такі як масиви Коціга, магичні конструкції, матриці Робертса, їх узагальнення та інші. До таких спеціалізованих конструкцій належать і лінійні ортогональні масиви, які задіяні у наступному прикладі.

Приклад 2. Розглянемо граф Геммінга $H(4,5) = K_5^4$ – це граф, в якості вершин якого будемо розглядати всі слова довжини 4 над алфавітом з 5 символів, а дві вершини суміжні тоді й лише тоді, коли відрізняються рівно в одній позиції. Вершини $H(4,5)$ позначатимемо u_{x_1, x_2, x_3, x_4} , де x_1, x_2, x_3, x_4 – координата вершини, $x_i \in Z_5$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тоді суміжні вершини u_{x_1, x_2, x_3, x_4} і u_{y_1, y_2, y_3, y_4} відрізняються рівно в одній координаті. Розв'яжемо задачу побудови дистанційної антимігичної розмітки графу $H(4,5)$, тобто потрібно побудувати бієктивне відображення: $f: X \rightarrow W$, $X = V(H(4,5))$, $W = \{1, 2, \dots, 5^4\}$, для якого ваги всіх вершин є попарно різними.

На першому етапі проведемо формалізацію умов розмітки. Тут використовується аналітичний метод, оскільки означення дистанційної антимігичності переводиться у співвідношення для локальних сум. Для вершини u_{x_1, x_2, x_3, x_4} її відкритий окіл $N(u_{x_1, x_2, x_3, x_4})$ складається з усіх вершин, що відрізняються від неї рівно в одній координаті, а вага має вигляд $w(u_{x_1, x_2, x_3, x_4}) = \sum_{u_{y_1, y_2, y_3, y_4} \in N(u_{x_1, x_2, x_3, x_4})} u_{y_1, y_2, y_3, y_4}$. Оскільки

кожна вершина суміжна з 16 іншими вершинами, задача полягає у побудові такого відображення f , при якому усі ваги є попарно різними.

На другому етапі для виведення структурного наслідку використаємо комбінаторно-аналітичний метод аналізу координатної структури опису графу. Для фіксованих трьох координат множина вершини змінюється лише одна координата. Якщо сума міток на кожній такій множині є сталою і дорівнює Q , то вага вершини визначається лише її власною міткою: $w(u_{x_1, x_2, x_3, x_4}) = 4Q - 4f(u_{x_1, x_2, x_3, x_4})$. Отже, попарна відмінність ваг автоматично впливає з бієктивності розмітки. Таким чином, задача зводиться до побудови такої системи міток, для якої суми міток у множинах вершин, де змінюється лише одна координата, є сталими..

Третій етап полягає у використанні спеціальної комбінаторно-алгебраїчної конструкції – лінійного ортогонального масиву над полем Z_5 . У теорії комбінаторних схем ортогональний масив є таблицею, у якій усі комбінації символів у вибраних стовпцях з'являються однакову кількість разів [15]. Лінійні ортогональні масиви будуються за допомогою невироджених лінійних перетворень над скінченними полями. Для вершини u_{x_1, x_2, x_3, x_4} визначимо лінійні форми: $l_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $l_2 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$, $l_3 = x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4$, $l_4 = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4$, де всі обчислення виконуються за модулем 5. Оскільки система цих форм є невиродженою над полем Z_5 , кожній вершині графу відповідає єдина четвірка $(l_1, l_2, l_3, l_4) \in Z_5^4$. При зміні однієї координати вершини значення кожної з форм рівномірно пробігають усі елементи поля Z_5 . Саме ця властивість забезпечує сталість сум міток у множинах вершин, де змінюється лише одна координата.

На четвертому етапі побудуємо розмітку. Четвірку (l_1, l_2, l_3, l_4) інтерпретуємо як запис числа у системі числення за основою 5. Тоді покладемо $f(u_{x_1, x_2, x_3, x_4}) = 125l_1 + 25l_2 + 5l_3 + l_4 + 1$. Оскільки всі четвірки (l_1, l_2, l_3, l_4) є попарно різними, значення $f(u_{x_1, x_2, x_3, x_4})$ пробігають усю множину $\{1, 2, \dots, 5^4\}$. Отже, побудоване відображення f є бієктивним.

П'ятий етап – перевірка побудованої розмітки. Із співвідношення $w(u_{x_1, x_2, x_3, x_4}) = 4Q - 4f(u_{x_1, x_2, x_3, x_4})$ та бієктивності побудованого відображення f випливає, що всі ваги вершин попарно різні. Отже, побудована розмітка є дистанційною антимагічною розміткою графу $H(4,5)$.

Приклад 2 демонструє поєднання аналітичних, комбінаторних та алгебраїчних методів із використанням спеціалізованої комбінаторної конструкції .

У роботі показано, що задачі адитивних розміток графів можуть бути описані в межах спільної моделі незалежно від конкретного типу розмітки. Виділено основні етапи розв'язування таких задач та простежено роль аналітичних, комбінаторних і алгебраїчних методів на різних етапах

дослідження. На прикладах дистанційних магічних і дистанційних антимагічних розміток продемонстровано, що одна й та сама схема дослідження може реалізовуватись із використанням різних математичних конструкцій залежно від структури графу та умов розмітки.

Отримані результати можуть бути використані як основа для подальшої систематизації методів дослідження адитивних розміток графів та узагальнення підходів до задач існування, побудови й аналізу розміток різних типів.

Література

1. Gallian J. A. A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*. 2024. #DS6. 712 p.
2. Wallis W. D. *Magic Graphs*. Springer Science+Business Media New York/ 2001. 154 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0123-6
3. Vaca M., Miller M., Ryan J, Semanicová-Fenovčíková A. *Magic and Antimagic Graphs. Developments in Mathematics*. Springer International Publishing 2019. 322 p. DOI: 10.1007/978-3-030-24582-5
4. Семенюта М.Ф. Комбінаторні конфігурації у визначенні антимагічних розміток графів. *Кибернетика і системний аналіз*. 2021. Т. 57, №2. С.30-40.
5. Arumugam S., Froncek D., Kamatchi N. Distance magic graphs—a survey. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*. 2011. Special Edition. P. 11-26. DOI: 10.22342/jims.0.0.15.11-26
6. Anholcer M., Cichacz S., Peterin I. Spectra of graphs and closed distance magic labelings. *Discrete Mathematics*. 2016. Vol. 339. P. 1915-1923. DOI: 10.1016/j.disc.2015.12.025
7. O’Neal A., Slater P. An introduction to distance D magic graphs. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*. Special Edition. 2011. P. 89-107. DOI: 10.22342/jims.0.0.22.89-107
8. Семенюта М.Ф. Про дистанційну антимагічну розмітку графів. *Теорія оптимальних рішень*. 2016. С. 26 - 32.
9. Cichacz S., Froncek D. Distance magic circulant graphs. *Discrete Mathematics*. 2016. Vol. 339, Issue 1. P. 84-94.
10. Nainarraj K., Ramalakshmi A., Sivasankaran N., Arumugam S. A note on Distance Magic and Distance antimagic graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 2015. Vol. 48. P. 183-187. DOI: 10.1016/j.endm.2015.05.027
11. Семенюта М.Ф., Донец Г.А. О групповых разметках некоторых графов. *Кибернетика і системний аналіз*. 2020. Т. 56, №5. С.18-28.
12. Cichacz S., Froncek D., Sugeng K., Zhou S. Group distance magic and antimagic graphs. *Acta Mathematica Sinica, English Series*. 2016. Vol. 32. P. 1159-1176. <https://doi.org/10.1007/s10114-016-4646-9>
13. Fronček D., Shepanik A. Regular handicap graphs of order $n \equiv 4 \pmod{8}$. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. 2022. Vol. 10(1). P. 259-273. DOI: 10.5614/ejgta.2022.10.1.18

14. Cichacz S., Miklavič Š. Group distance magic cubic graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*. 2026. Vol. 46(2). P. 465-481. <https://doi.org/10.7151/dmgt.2613>

15. Lin C. D., Stufken J. Orthogonal Arrays: A Review. arXiv:2505.15032. 2025. P.1-40. DOI: 10.48550/arXiv.2505.15032

KÖNIG'S INFINITY LEMMA FOR LOCALLY FINITE ULTRAMETRIC SPACES GENERATED BY LABELED TREES

Oleksiy Dovgoshey^{1,2}, Olga Rovenska³

¹*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU, Slovyansk,
Ukraine*

²*University of Turku, Turku, Finland*

³*Donbas State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine*

Abstract. We analyze the interplay between labeled trees and the ultrametric spaces they present. We provide characterizations of labeled trees that generate separable ultrametric spaces and those that generate locally finite ultrametric spaces. In particular, we establish an analog of König's Infinity Lemma for locally finite ultrametric spaces generated by labeled trees.

According to [11], any finite ultrametric space is isometrically describable by a Gurvich-Vyalyi representing tree. The Gurvich-Vyalyi representing trees form a subclass of finite trees equipped with a specific labeling of the vertex set. Trees with labeled vertices have been extensively studied, resulting in numerous contributions (see, e.g., the survey in [10]). The corresponding geometric interpretation of the Gurvich-Vyalyi representation [14] provides a framework for addressing various extremal problems related to finite ultrametric spaces [1-2,4]. Analogues of the Gurvich-Vyalyi representation and its geometric interpretation have recently been extended to the class of totally bounded ultrametric spaces [7].

Infinite trees with positive real-valued edge labelings are commonly referred to as R -trees. The structural relationships between finite subtrees of R -trees and finite monotone rooted trees are described in [3]. The categorical equivalence between trees and ultrametric spaces has been studied in [12, 13].

Ultrametric spaces generated by arbitrary nonnegative vertex labelings on finite and infinite trees were introduced in [3] and subsequently studied in [5, 6]. A characterization of totally bounded ultrametric spaces generated by labeled almost rays was provided in [9]. Furthermore, [8] contains a metric characterization of ultrametric spaces generated by labeled star graphs.

Our work [15] continues the aforementioned studies on the characterization of labeled trees generating ultrametric spaces, with a focus on the topological

properties of these spaces. The aim is to describe the class of trees that admit labelings which generate separable ultrametric spaces. Additionally, we establish a characterization of such trees in terms of the local finiteness of the corresponding ultrametrics.

In what follows, we will use the terminology of [3].

By labeled tree $T(l)$ we mean a tree T equipped with a labeling $l : V(T) \rightarrow \mathbb{R}^+$, where $V(T)$ is the vertex set of T . Let $T(l)$ be a labeled tree. We define a mapping $d_l : V(T) \times V(T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ by

$$d_l(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{if } u = v \\ \max_{w \in V(P)} l(w), & \text{if } u \neq v, \end{cases}$$

where P is the path joining u and v in T . The mapping d_l is an ultrametric on $V(T)$ iff the inequality $\max\{l(u), l(v)\} > 0$ holds for all adjacent $u, v \in V(T)$.

The following two results were proved in [15].

Theorem 1. Let T be a tree. Then the following statements are equivalent:

1. The vertex set of T is countable.
2. All ultrametric spaces $(V(T), d_l)$ are separable.
3. There exists a labeling $l : V(T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that $(V(T), d_l)$ is a separable ultrametric space.
4. For every star graph $S \subseteq T$ there exists a non-degenerate labeling $d_S : V(S) \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that the ultrametric space $(V(S), d_S)$ is separable.

The König Infinity Lemma describes the finite connected graphs as graphs which have no vertices with infinite degree and contain no rays. The next theorem can be considered as an analog of this lemma for locally finite ultrametric spaces $(V(T), d_l)$.

Theorem 2. Let $T = T(l)$ be a separable ultrametric space generated by labeling $l : V(T) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Then the following statements are equivalent:

1. The ultrametric space $(V(T), d_l)$ is locally finite.
2. The ultrametric spaces $(V(R), d_l|_{V(R) \times V(R)})$ and $(V(S), d_l|_{V(S) \times V(S)})$ are locally finite for all rays $R \subseteq T$ and all star graphs $S \subseteq T$.

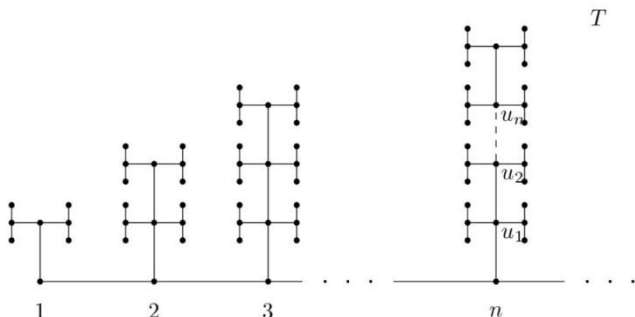


Fig.1 – The tree T does not contain any vertex of infinite degree and the symmetric difference of vertex sets $V(R_1), V(R_2)$ is finite for any two rays $R_1 \subseteq T, R_2 \subseteq T$

Example 1. Let T be the tree containing the ray $R = (v_1, v_2, \dots, v_n, \dots)$ with labeling $l_R: V(T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfying $l_R(v_n) = n$ for each $n \in \mathbb{N}$ (see Figure 1). If $l: V(T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ is a non-degenerate labeling such that l_R is a restriction of l on the set $V(R)$, then the ultrametric space $(V(T), d_l)$ is locally finite by Theorem 2.

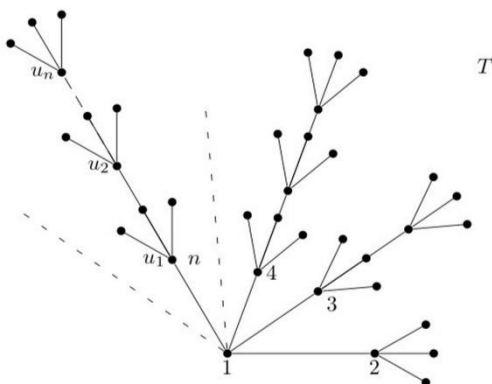


Fig.2 – The tree T is rayless and contains exactly one vertex of infinite degree

Example 2. Let T be the tree containing the vertex v with $\text{deg}T(c) = \aleph_0$, let S be the star graph induced in T by c and all vertices adjacent to c , and let $l_S:$

$V(S) \rightarrow \mathbb{R}^+$ be an injective labeling such that $l_S(V(S)) = \mathbb{N}$ (see Figure 2). If $l : V(T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ is a non-degenerate labeling such that l_S is a restriction of l on the set $V(S)$, then the ultrametric space $(V(T), d_l)$ is locally finite by Theorem 2.

References

1. Dovgoshey, O., Petrov, E. & Teichert, H.M. (2015). On spaces extremal for the Gomory-Hu inequality. *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 7, 133–142.
2. Dovgoshey, O., Petrov, E., & Teichert, H.-M. (2017). How rigid finite ultrametric spaces can be? *Fixed Point Theory and Applications*, 19(2), 1083–1102.
3. Dovgoshey, O. (2020). Isomorphism of trees and isometry of ultrametric spaces. *Theory and Applications of Graphs*, 7(2), Article 3.
4. Dovgoshey, O., & Petrov, E. (2020). On some extremal properties of finite ultrametric spaces. *p-adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 12(1), 1–11.
5. Dovgoshey, O., & Küçükaslan, M. (2022). Labeled trees generating complete, compact, and discrete ultrametric spaces. *Annals of Combinatorics*, 26, 613–642.
6. Dovgoshey, O., & Kostikov, A. (2023). Locally finite ultrametric spaces and labeled trees. *Journal of Mathematical Sciences*, 276(5), 614–637.
7. Dovgoshey, O. (2025). Totally bounded ultrametric spaces and locally finite trees. *arXiv:2502.04228*.
8. Dovgoshey, O., & Rovenska, O. (2025). Ultrametric spaces generated by labeled star graphs. *Journal of Mathematical Sciences*, 228(2), 182–198.
9. Dovgoshey, O., & Vito, V. (2025). Totally bounded ultrametric spaces generated by labeled rays. *Applied General Topology*, 26(1), 163–182.
10. Gallian, J. A. (2024). A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, DS6.
11. Gurvich, V., & Vyalyi, M. (2012). Ultrametrics, trees, and bottleneck arcs. *Mathematics Education*, 3(16), 75–88.
12. Hughes, B. (2004). Trees and ultrametric spaces: a categorical equivalence. *Advances in Mathematics*, 189(1), 148–191.
13. Lemin, A. J. (2003). The category of ultrametric spaces is isomorphic to the category of complete, atomic, tree-like, and real graduated lattices LAT^* . *Algebra Universalis*, 50(1), 35–49.
14. Petrov, E., & Dovgoshey, A. (2014). On the Gomory–Hu inequality. *Journal of Mathematical Sciences*, 198(4), 392–411.
15. Dovgoshey, O., & Rovenska, O. (2026). Labeled Trees Generating Separable and Locally Finite Ultrametrics. *Annals of Combinatorics*, <https://doi.org/10.1007/s00026-026-00806-0>.

SPECTRAL-ENTROPY ANALYSIS OF THE DYNAMICS AND TRANSFORMATION OF ECONOMIC SYSTEMS: THE CASE OF UKRAINE'S ENERGY SECTOR

Zhanna Chernousova

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

СПЕКТРАЛЬНО-ЕНТРОПІЙНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІКИ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ: СТРУКТУРНА ТРАНСФОРМАЦІЯ НА ПРИКЛАДІ ЕНЕРГЕТИКИ УКРАЇНИ

Жанна Черноусова

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Анотація. У роботі запропоновано підхід до аналізу економічних систем як динамічних мереж, у яких траєкторії розвитку визначаються структурою зв'язків між станами. Обґрунтовано, що циклічні режими мають спектральну природу та можуть інтерпретуватися як «циклічні пастки», у яких система мінімізує короткострокові витрати, водночас відтворюючи довгострокові втрати. Для оцінювання структурної невизначеності використано ентропійний підхід, а структурні інтервенції формалізовано як зміну топології графа, що зумовлює появу нових траєкторій розвитку. Емпіричний аналіз енергетичної системи України за 2022–2026 рр. свідчить про зростання залежності від імпорту електроенергії та формування циклічної структури «дефіцит – дисбаланс – імпортне балансування». Показано, що циклічні сценарії є відносно ефективними у короткостроковому періоді, однак призводять до накопичення витрат у динаміці, тоді як структурна трансформація створює передумови для зниження витрат у довгостроковій перспективі.

Modern economic systems, particularly energy systems, can be interpreted as dynamic networks in which system trajectories are determined by the structure of connections between aggregated states. This approach can be formalized as a directed graph $G=(V, E)$ [3], where vertices represent macrostates (generation deficit, system imbalance, electricity import), and edges correspond to possible transitions between them. The system dynamics are described by the equation $x(t+I)=Ax(t)$, where A is the transition matrix interpreted as an operator of structural relationships between system states [1]. Such a formulation allows economic dynamics to be analyzed not only in terms of equilibrium outcomes but also through the evolution of trajectories shaped by the topology of the system.

In a simplified model of the Ukrainian energy system, three key states can be distinguished: generation capacity deficit ($v1$), system imbalance ($v2$), and import-based balancing ($v3$). These states form a cyclic structure whose spectral

properties correspond to periodic dynamics without a long-term development trend [4]. The corresponding transition matrix can be written as

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

which explicitly represents the cycle $v1 \rightarrow v2 \rightarrow v3 \rightarrow v1$. The eigenvalues of this matrix lie on the unit circle, reflecting the purely cyclic nature of the baseline structure and implying the absence of convergence and the persistence of oscillatory behavior. As a result, key system indicators evolve cyclically, repeatedly returning to previous values rather than converging to a stable equilibrium.

The system dynamics are sequential in time: a deficit in period t leads to imbalance in period $t+1$, which induces imports in period $t+2$, after which the system returns to the deficit state, forming a closed loop. This reflects the absence of structural change, as the system responds to disturbances but does not eliminate their underlying causes. Such dynamics can be interpreted as a structural lock-in mechanism, where the topology of the system constrains the set of feasible trajectories.

To better reflect real-world conditions, a small parameter $\varepsilon > 0$ is introduced, capturing limited structural flexibility. The modified matrix takes the form

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 1 - \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, 0 < \varepsilon \ll 1,$$

where small values of ε capture the presence of alternative transitions while preserving the dominant cyclic structure. In this case, the system retains its cyclic topology, but its spectral characteristics change: periodic dynamics may transform into damped oscillations, indicating partial stabilization. The appearance of eigenvalues with modulus less than one reflects the presence of mechanisms that gradually reduce deviations. The parameter ε thus represents the degree of structural flexibility, while the overall intensity of dynamics depends on the scale of processes and does not alter the fundamental topology of the system.

Transition weights p_{ij} can be interpreted as relative weights or, under a corresponding interpretation, as relative frequencies of transitions from state j to state i . The entropy of the transition distribution reflects the diversity of development paths and characterizes structural flexibility [2]. In the limiting case of a uniform distribution, entropy reaches its maximum, indicating the absence of a dominant response mechanism. However, for small values of ε , the distribution becomes highly uneven, leading to low entropy and dominance of a single transition pattern. This restricts the variability of system trajectories and reinforces the persistence of cyclic dynamics.

Empirical evidence for Ukraine confirms this structure. Following the loss of more than 9 GW of generation capacity after 2022, the system became strongly dependent on electricity imports, which reached on the order of 3–4 TWh annually in 2024–2025 [6; 9; 7]. This indicates that the transition $v2 \rightarrow v3$

dominates, while alternative transitions remain weak. As a result, the entropy of the transition distribution is significantly below its maximum, reflecting limited diversity of system behavior and the dominance of a single balancing mechanism.

To evaluate the efficiency of such dynamics, a cost function w_{ij} is introduced, incorporating market prices, risk premiums, and infrastructure constraints. The expected system cost is defined as $E[C]=\sum_{i,j} p_{ij} w_{ij}$, which aggregates costs across all possible transitions. Under the dominance of the basic cycle, the expected cost of one cycle can be approximated as $C_{cycle}\approx(1-\varepsilon)(w_{12}+w_{23}+w_{31})+O(\varepsilon)$ [8], leading to cumulative cost growth over time. This implies that even in the presence of limited flexibility, the system remains inefficient in the long run, as the cyclic structure continuously reproduces costs in each period.

The proposed framework combines spectral graph analysis, entropy-based measures, and cost functions to interpret economic dynamics through the concept of a “cyclical trap.” Unlike most studies focusing primarily on structural properties or controllability of networks [4], this approach emphasizes the interaction between system topology, uncertainty, and economic efficiency. Within this framework, the system may exhibit rational behavior in the short term by minimizing current costs, while simultaneously reproducing structurally inefficient dynamics in the long term.

The exit from this trap is modeled as a structural transformation through the introduction of an additional state $v4$, associated with renewable energy development, decentralization, or integration into the European energy market [5; 6]. The extended transition matrix includes transitions to $v4$ governed by the parameter $\beta>0$, representing the degree of structural transformation. Increasing β modifies the spectral properties of the system and, under certain conditions, may lead to attenuation of cyclic dynamics and the emergence of new development trajectories.

Such transformation is typically more costly in the short term but may reduce costs in the long run, implying a trade-off between immediate efficiency and long-term sustainability [5]. This process may exhibit threshold effects, meaning that only sufficiently strong structural changes enable the system to exit the cycle and move to a qualitatively different regime of development.

Infrastructure constraints, such as limits on electricity import capacity, further restrict system dynamics by creating structural bottlenecks [6; 9]. These constraints limit the ability of the system to scale import-based solutions and reinforce dependence on external resources. Even when economically justified in the short term, reliance on imports does not ensure sustainable development.

When intertemporal optimization is taken into account, discounting reduces the weight of future costs without reducing their magnitude. As a result, the system may prefer short-term cost-minimizing decisions that reinforce long-term inefficiency. In particular, import-based balancing appears attractive in the short term, while the costs associated with the reproduction of cyclic dynamics are

shifted into the future. Thus, discounting contributes to the persistence of the cyclical trap by systematically favoring short-term solutions over structural change.

Finally, incorporating stochastic disturbances shows that cyclic systems tend to propagate shocks rather than absorb them, as disturbances are reproduced within the existing structure. In contrast, systems with extended topology exhibit greater adaptive capacity, as alternative trajectories allow for partial absorption of shocks. Therefore, economic development can be interpreted as an expansion of feasible states and trajectories achieved through structural transformation.

An additional implication of the proposed framework concerns the identification of structurally critical elements within the network. From a policy perspective, not all transitions have equal importance for system dynamics: interventions targeting dominant transitions or structurally central states may have a disproportionate impact on the overall trajectory. In particular, reducing the weight of the transition $v_2 \rightarrow v_3$ or strengthening alternative pathways associated with domestic generation can significantly alter both the spectral properties and entropy structure of the system.

Moreover, the proposed model provides a basis for integrating quantitative analysis with strategic decision-making. By combining spectral, entropy, and cost-based perspectives, it becomes possible to evaluate not only the current state of the system but also its potential for transformation under different scenarios. This enables the assessment of long-term development strategies in terms of their ability to expand the space of feasible trajectories, enhance resilience, and reduce structural inefficiencies.

References

1. Chung, F. (1997). *Spectral graph theory*. Providence, RI: American Mathematical Society.
2. Dehmer, M., & Emmert-Streib, F. (2009). *Analysis of complex networks: From biology to linguistics*. Vienna: Springer.
3. König, M., & Battiston, S. (2009). From graph theory to models of economic networks. *Networks and Heterogeneous Media*, 4(2), 191–216.
4. Liu, Y.-Y., Slotine, J.-J., & Barabási, A.-L. (2011). Controllability of complex networks. *Nature*, 473(7346), 167–173. <https://doi.org/10.1038/nature10011>
5. International Energy Agency. (2024). *Electricity Market Report 2024*. <https://www.iea.org/reports/electricity-market-report-2024>
6. ENTSO-E. (2024). *Transparency platform: Cross-border electricity flows*. <https://transparency.entsoe.eu>
7. DiXi Group. (2024). *Electricity market analysis in Ukraine* [Analitika rynku elektroenerhii v Ukraini]. <https://dixigroup.org> [In Ukrainian]
8. Operator of the Market. (2024). *Electricity market data in Ukraine* [Dani rynku elektroenerhii v Ukraini]. <https://www.oree.com.ua> [In Ukrainian]
9. Ukrenergo. (2024). *Annual report 2023* [Richnyi zvit 2023]. <https://ua.energy> [In Ukrainian]

MODELING THE TRANSMISSION OF FINANCIAL SHOCKS IN NETWORKS OF INTERDEPENDENT MARKETS

Olha Kravchenko

*National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky
Kyiv Polytechnic Institute"*

МОДЕЛЮВАННЯ ТРАНСМІСІЇ ФІНАНСОВИХ ШОКІВ У МЕРЕЖАХ ВЗАЄМОЗАЛЕЖНИХ РИНКІВ

Ольга Кравченко

*Національний технічний університет України «Київський
політехнічний інститут імені Ігоря»*

Abstract. The study examines the specifics of modelling the transmission of financial shocks in networks of interdependent markets using the deterministic Eisenberg–Noe model and stochastic SIS/SIR-type models. An integration of structural and probabilistic approaches is proposed through the introduction of a contagion coefficient that depends on the financial condition of the market and the intensity of its connections.

Financial market shocks are sudden and significant changes in asset values, liquidity, or capital availability that arise from internal imbalances or external factors such as global crises, political events, or macroeconomic shocks. They can manifest themselves in the form of sharp fluctuations in exchange rates, falling stock indices, rising government bond yields, or liquidity shortages in the banking system. The interdependent are the stock market, the foreign exchange market, and the government bond market, as they form a single financial ecosystem, where changes in one segment are instantly transmitted to others through the channels of capital flows, investment strategies, and expectations of participants.

The interdependence of markets means that even a local shock can escalate into a large-scale crisis if it spreads through a network of financial connections. For example, a devaluation in the foreign exchange market can cause a fall in the value of shares in the stock market and an increase in the yield on government bonds, which in turn affects the cost of borrowing for governments and businesses. Such interaction creates the risk of systemic instability, when a single negative factor triggers a chain reaction throughout the financial system. That is why modelling the transmission of financial shocks in networks of interdependent markets is an important tool for predicting risks and developing effective mechanisms for macro prudential regulation.

The construction of a mathematical model of the transmission of financial shocks in networks of interdependent markets is based on the methods of graph theory and systemic differential equations, which allow describing the dynamics of the spread of crisis phenomena. As one of the basic approaches, the Eisenberg–Noe model was used, which formalizes the mechanism of cascading defaults in the financial system and allows assessing the risk of systemic

instability [1]. In parallel, stochastic models of the SIS/SIR type was used to analyse the spread of financial shocks in networks. The combination of these methods allows providing a comprehensive view of the processes of shock transmission and creating a basis for the development of effective macro prudential regulation tools.

The problems of modelling the transmission of financial shocks in networks of interdependent markets are multidimensional and cover both methodological and practical aspects. First, the complexity lies in the high dynamism of financial systems, where the parameters of interdependence between markets change over time, which makes it difficult to build stable models. Second, there is the problem of incompleteness and asymmetry of information: data on mutual obligations, liquidity and risks are often closed or non-public, which limits the accuracy of modelling. Third, models based on graphs and systems of differential equations face the problem of scalability, since an increase in the number of nodes and connections leads to an exponential increase in computational complexity.

An additional problem is the stochastic nature of the spread of financial shocks, which depends on the behavioural factors of market participants, external shocks and regulatory interventions. This creates the need to integrate deterministic models with stochastic ones, which complicates the mathematical apparatus and requires the development of new methods for calibrating parameters. An important challenge is also to take into account the heterogeneity of markets: different segments of the financial system have different levels of stability, liquidity and intensity of interdependencies, which requires the introduction of adaptive shock transmission coefficients.

Finally, the interpretation of modelling results for practical policy remains a challenge: even with formalized models, it is difficult to transform their findings into specific macro prudential measures. Thus, modelling the transmission of financial shocks in networks of interconnected markets requires a comprehensive approach that combines precise mathematical methods, probabilistic models, and practical tools for decision-making in the field of financial stability.

Thus, modern financial markets are characterized by a high level of interdependence and global integration. Financial institutions and markets form complex networks of mutual obligations, which creates conditions for cascading defaults in the event of local shocks, and this is what justifies the use of the Eisenberg–Noe model for structural risk analysis. At the same time, the spread of financial shocks is stochastic in nature, since it depends on the probabilities of transmission of crisis phenomena between markets, the behaviour of participants and external factors, which justifies the use of SIS/SIR models for modelling time dynamics and probabilistic transitions between the states of “stable”, “affected” and “recovered”. The combination of these two approaches allows us to simultaneously take into account structural interdependencies and the randomness of shock propagation processes, which provides a comprehensive analysis of systemic instability.

Let there be a set of markets $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$.

Obligation matrix: $L = [L_{ij}]$, where L_{ij} denotes the debt of market i to market j .

External assets: $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Total obligations: $p_i = \sum_{j=1}^n L_{ij}$.

Relative shares: $\pi_{ij} = L_{ij}/p_j$.

Eisenberg–Noe block (deterministic):

$$p_i^{(k+1)} = \min \left\{ \bar{p}_i, x_i - \sigma_i + \sum_{j=1}^n \pi_{ij} p_j^{(k)} \right\}, \quad i = 1, \dots, n$$

where σ_i is the shock magnitude affecting market i . Iterations continue until convergence $p^{(k+1)} \approx p^{(k)}$.

SIS/SIR block (stochastic).

Each market can be in one of three states:

$S_i(t)$ – stable (susceptible);

$I(t)$ – shocked (infected);

$R(t)$ – recovered (restructured).

The dynamics of the probability of shock propagation are described by:

$$\frac{dS_i}{dt} = -\beta_i S_i \sum_{j=1}^n a_{ij} I_j, \quad \frac{dI_i}{dt} = \beta_i S_i \sum_{j=1}^n a_{ij} I_j - \gamma_i I_i, \quad \frac{dR_i}{dt} = \gamma_i I_i$$

where a_{ij} are elements of the adjacency matrix of the network ($a_{ij} = 1$ if $L_{ij} > 0$ or $L_{ji} > 0$);

β_i is the transmission coefficient of shocks;

γ_i is the recovery rate.

To ensure the interconnection between these blocks, we introduced the contagion coefficient β_i depending on the financial state of the market and the structure of its connections. Then, instead of β_i , we introduce a function that depends on the liquidity deficit obtained in the Eisenberg–Noe block. The relative level of losses of market i was defined as:

$$\delta_i = \frac{\bar{p}_i - p_i^*}{\bar{p}_i}$$

where p_i^* is the solution of the Eisenberg–Noe system (final state of payments).

If $p_i^* = \bar{p}_i$, then $\delta_i = 0$ (the market fully fulfils its obligations, no shock is generated).

If $p_i^* < \bar{p}_i$, then $\delta_i \in (0, 1]$ (the market is in a default state).

Then the infection intensity β_i with losses δ_i was related as:

$$\beta_i(t) = \beta_0 \cdot \delta_i + \sum_{j=1}^n \pi_{ij} I_j(t).$$

The probability that a "healthy" market i will transition to a "shocked" state depends on its financial vulnerability, defined through the matrix L :

$$\frac{dS_i}{dt} = -S_i \left(\sum_{j=1}^n \alpha L_{ji} I_j(t) \right)$$

where L_{ji} is the amount of debt of market j to market i . If market j is "sick" (I_j is high), it does not repay the debt, which directly "infects" market i .

α is the scaling parameter (sensitivity coefficient to defaults).

$\sum_{j=1}^n \alpha L_{ji} \cdot I_j(t)$ is the financial pressure from creditors.

To quantify the risks, one should introduce the default probability function $P(D_i, t)$, where the argument is the cumulative stress index $\Psi_i(t)$. This allows us to take into account both the actual deficit of funds in the network of obligations and the probabilistic pressure from "infected" neighboring markets. This approach makes it possible to predict not only the fact of default, but also the time lag before its occurrence. So, the default probability function was defined as:

$$P(D_i, t) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(\Psi_i(t) - \theta_i)}}$$

where $\Psi_i(t)$ is the aggregate node stress index, which consists of two components:

$$\Psi_i(t) = \omega_1 \cdot \frac{\bar{p}_i - p_i^*}{\bar{p}_i} + \omega_2 \cdot \sum_{j=1}^n \pi_{ij} I_j(t)$$

where $\frac{\bar{p}_i - p_i^*}{\bar{p}_i}$ is relative liquidity gap (from the Eisenberg–Noe model).

$\sum_{j=1}^n \pi_{ij} I_j(t)$ is pressure from counterparties already in shock.

ω_1, ω_2 are weights of the significance of internal and external factors.

θ_i is threshold resilience threshold of the market i . This is the capital or reserves of the market. If $\Psi_i(t) > 0$, the probability of default increases rapidly.

λ is the sensitivity parameter. It determines how quickly the system reacts to exceeding the stress threshold.

$\omega_1 \cdot \frac{\bar{p}_i - p_i^*}{\bar{p}_i}$ is the structural shock.

$\omega_2 \cdot \sum_{j=1}^n \pi_{ij} I_j(t)$ is the dynamic infection.

In the proposed model, the stability threshold θ_i acts as the "financial immunity" of the market. It determines the ability of the node to absorb shocks without going into default (I). To ensure the adequacy of the model to real economic conditions, θ_i is calculated based on capitalization and liquidity indicators:

$$\theta_i = \frac{C_i + A_i^{liq}}{\bar{p}_i}$$

where C_i is the Tier 1 capital or net market assets i . This is the main buffer that absorbs losses.

A_i^{liq} is highly liquid assets (cash, government bonds) that can be immediately used to repay liabilities.

\bar{p}_i is the total amount of external liabilities (normalization factor).

Interpretation of values:

1. High resilience ($\theta_i \gg \Psi_i$) – the market has sufficient internal resources to compensate for counterparty defaults. In the SIR model, this corresponds to a low probability of transition from state S to state I .

2. Critical vulnerability ($\Psi_i \rightarrow \theta_i$) – even a small additional shock or delay in payment from one of the counterparties leads to an exponential increase in the risk of default due to the logistic nature of the function $P(D_i, t)$.

The parameter θ_i could be modified to take into account regulatory norms (for example, Basel III requirements). In this case, the stability threshold is adjusted by the capital adequacy ratio (CAR):

$$\theta_i^{adj} = \theta_i \cdot (1 - CAR_{req}).$$

This allows modelling scenarios in which the market is considered "shocked" not only in the case of a physical lack of funds, but also in the event of a violation of financial stability standards, which triggers regulatory intervention mechanisms.

Thus, modelling the transmission of financial shocks in networks of interdependent markets requires the integration of deterministic and stochastic approaches, enabling consideration of both structural interdependencies and the probabilistic dynamics of crisis propagation. The proposed model, incorporating a contagion coefficient dependent on the financial condition of the market and the intensity of its connections, provides a more realistic assessment of systemic risks and establishes a foundation for effective macro prudential regulation of financial stability.

This publication was prepared as part of the research project "Transmission Models of Digitalisation and Neo-Industrial Renewal of Innovative Infrastructure" (project No. 2908f, state registration number 0126U001339), carried out in accordance with Order No. 23 of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated 9 January 2026 and Order No. NON/47/26 of Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute dated 26 January 2026 for the period 2026–2028.

Literature

1. Eisenberg, L., & Noe, T. H. (2001). Systemic Risk in Financial Systems. *Management Science*, 47(2), 236–249.

MEANING AS WHOLENESS EXPERIENCED

Yurii Prokopchuk

Institute of Technical Mechanics of the NAS of Ukraine and SSA of Ukraine

Abstract. The article discusses the concept of 'meaning' within the framework of complex cognitive systems control. LGP can serve as the foundation for a comprehensive theory of cognitive control. It acts not merely as an optimization method (the essence of 'attractivity'), but as a fundamental law for transforming data into knowledge, meaning, and action, ensuring the 'global ontological coherence' (integrity) of complex systems. Key aspects: Limit Generalization Paradigm - LGP, Integrity / Wholeness Architecture - System 0/1/2/3, Meaning/Gist -Based Processing, Vagueness Processing, Continuum of Fuzziness, Distilling the Essence, Combinatorial Meaning / Semantic Space, Global Ontological Coherence, 'Tangle of Mind', Proto-qualia as "Hidden Variables"

Introduction. Wholeness is a deep inner experience of completeness, harmony, and unity, where a person perceives themselves not as a collection of separate traits or roles, but as an indivisible essence. In cognitive science and philosophy, wholeness is described as "phenomenal unity" - a state in which consciousness integrates disparate sensory data and thoughts into a single global experience. Wholeness encompasses both the light and dark sides of experience, merging them into a life-affirming flow of being (e.g., "dark solutions" in LGP: complexity creates meaning [1]). The experience of wholeness is not a final destination but a continuous process: perceiving oneself as an inherently whole field of consciousness that is in a constant state of becoming. It requires the acceptance of one's own limitations (e.g., "living boundaries" or the "edges of chaos" in discrimination tasks [1], [2]). A hallmark of the experience of wholeness is the profound realization that, at this moment, "nothing is missing" (the essence of situational awareness and the absence of a sense of lack).

Integration of Polarities (Embodied Combinatorics): True wholeness is felt when a person stops struggling with "negative" emotions or states and allows them to simply exist within the space of awareness (a state of "total allowance"). For instance, an "Event" in LGP becomes surrounded by a multitude of sketch-interpretations with various emotional valuations, which together form a "valuation cloud" [3], [4], [5]. At the level of relationships, wholeness manifests as the ability to see the integrity of the other without trying to "fix" them, and to build connections from a state of fullness (manifested, in part, through an agent's socially distributed sketch networks - the "I-web of an agent" [1]). In action, one may experience a sense of flow and "calling," where work becomes a natural expression of the creative Self (e.g., "arrows of cognition" fueled by embodied aesthetic emotions as an energetic "pump" [1]).

Sometimes "wholeness" is described as the "master virtue," ensuring the unity of our diverse strengths and experiences. LGP attempts to use formal means to describe the key aspects of perceiving meaning based on the experience

of wholeness [6], [7].

The topic of the "Meaning of Information" (or semantic information) is one of the most complex and multidisciplinary fields of science. The primary challenge lies in the fact that Claude Shannon's classical theory intentionally ignored "meaning," focusing instead on the technical transmission of data. Luciano Floridi developed the General Theory of Semantic Information (GSTI) [8]. His central thesis is that information must be true to be meaningful. Floridi addresses the question: "How do symbols acquire meaning?" He argues that meaning emerges through a process of interaction (specifically, how data structures an agent's behavior in a veridical manner).

A landmark event in the history of cognitive science was the "The Meaning of Information" workshop held at the Santa Fe Institute (SFI) in October 2017, which brought together an intellectual elite including Daniel Dennett, David Krakauer, Terrence Deacon, and others. The primary objective was to finally "marry" Shannon's rigid mathematics with biological and cognitive meaning [9], [10]. Dennett actively promoted the idea that biological systems are "meaning-extracting machines." The seminar explored how meaning 'emerges' from simple chemical signals into complex cultural structures (in LGP: System 0 → System 3). At the lower level, it is a mere reaction; at the upper level, it is a combinatorial semantic space that allows for the modeling of infinite variations of reality. The result: Information acquires meaning only when it is "useful" for the survival or goal-attainment of an agent [9].

A comparison of the approaches taken by Luciano Floridi and the Santa Fe group (Dennett, Krakauer, et al.) reveals an intriguing dichotomy: a debate between logical purity and biological pragmatism.

For Floridi, meaning is inextricably linked to correctness; that is, it is embedded in proper form and truthfulness. To him, meaning is a correspondence to facts. Floridi introduced the concept of Levels of Abstraction (LoA), where meaning depends on the specific angle from which we view the data. These are discrete levels of description. In LGP, embodied LoA are formed by sketch networks, where the formal "truthfulness" of information is less critical (e.g., the "Interface Theory of Perception") [1].

The Santa Fe approach is dominated by the idea of algorithmic compression. Dennett and Krakauer believe that meaning is a "distillate" oriented toward functional significance. The brain filters out noise not because it chooses a "level," but because it seeks the shortest code for managing reality: meaning is the process of compressing data for decision-making. For them, the meaning of information is its ability to reduce the system's energy expenditure on predicting the future (Semantic Information and Thermodynamics). If a false visualization allows the system to react faster and survive, it contains more meaning than a ton of useless but true details. Dennett and his colleagues concluded that information is the "raw material," while meaning is the "processed product" that emerges only within active, goal-oriented systems. This is very close to the LGP approach, specifically regarding "critical sketches" and the "thin-slicing" of heuristics in discrimination tasks. Efficiency in terms of

survival or functional fault tolerance is paramount. Furthermore, in LGP, the key to the "meaning of information" lies in ensuring "integrity," "criticality," "emergence," "controlled hallucination," and "self-transcendence" within goal-oriented systems [1].

Fuzzy-Trace Theory (FTT) is directly relevant to the topic of "meaning." This is a contemporary cognitive model of memory and decision-making developed by C. Brainerd and V. Reyna [11]. It explains why human memory is often "erroneous" yet surprisingly efficient. This theory fits well within the context of LGP, as it effectively describes the mechanism of "sketches" in human consciousness. The central tenet of FTT is that when we perceive information, the brain simultaneously creates two independent types of memory traces: "Verbatim traces" (precise, detailed data) and "Gist traces" (fuzzy, abstract representations of the essence). The Gist trace is essentially a "sketch" of reality. It ignores noise (details) in order to preserve a functionally significant structure. With age and experience, the cognitive system shifts toward "semantic" (gist) encoding. Gist traces are organized into a hierarchy of abstraction levels (Precision-to-Fuzziness Gradient: Surface Gist, Relational Gist, Ordinal/Qualitative Gist, and Bottom-line Gist). Reyna and Brainerd describe this as the "Fuzzy-to-Verbatim Continuum" [12]. According to LGP, a sketch network can incorporate a vast number of empirical and generative sketches of an image (or any piece of information). LGP, like FTT, distinguishes between verbatim (literal, precise) and gist (essential) representations, predicting that reliance on the gist increases with experience and expertise. When perceiving information, the 'brain' creates a "spectrum" of meanings, ranging from the simplest to the most abstract. By simplifying complex data into essential meaning, the brain reduces cognitive load. Gist allows for faster processing of information, easier identification of patterns, and quicker access to memory and emotional values.

The following FTT thesis perfectly confirms the LGP concept, where the system strives for "limit generalization" to minimize cognitive effort and achieve integrity:

"Gist representations are not unitary; they exist at multiple levels of abstraction... and people generally prefer to operate at the simplest level of gist (the 'fuzzy processing preference') that is sufficient to perform a task." (Reyna, 2012).

Keith Stanovich (one of the "fathers" of System 1 and 2 theory) classifies FTT as a specific variant of dual-process models, but emphasizes that Reyna introduces a fundamentally different hierarchy (Gist as an "Advanced System 1"). He points out that "rationality" in FTT can be achieved through high-level Gist, rather than the operation of System 2. In Kahneman's models, errors are failures of intuition (System 1); LGP and FTT show that human errors are not merely "dumb intuition," but the work of a complex mechanism of meaning extraction (in LGP, the "controlled hallucination" mechanism is engaged as the primary means of overcoming uncertainty). All sketches of the cones of detail and generalization within the sketch network for a selected sketch are activated

simultaneously, triggering (for each sketch) all situationally available and competing computational mechanisms. The processing of "semantic" sketches and "precise" sketches requires substantially different resources.

The fundamental difference between the LGP approach and FTT (as well as dual processes in general) is the presence of System 0 and System 3, which forms a coherent and transparent "System 0/1/2/3" architecture [4], [7]. Furthermore, it is important that the generation and processing of "Meaning" and "Gist" (via sketch networks) occurs at all levels when solving multi-scale discrimination tasks (strategic, tactical, operational, and implicit tasks). This is the highest form of cognitive development. LGP and FTT differ significantly in their degree of formalization. LGP describes the "mechanics" of how the limit of data complexity (uncertainty), resource constraints (primarily computational, energetic, and temporal), and the necessity of "survival" in a competitive environment force the system to transition to the level of operating with meanings within the framework of "Integrity."

The mathematical approach of Aude Oliva and Antonio Torralba to scene "sketches" is based on the concept of the Spatial Envelope [13]. Their key idea is that to understand the essence (gist) of a scene (e.g., "forest," "street," "kitchen"), the brain does not need to recognize individual objects. Instead, the system analyzes the statistical properties of the global distribution of frequencies and orientations in the image (Naturalness, Openness, Expansion, Roughness). This approach can be considered part of the logic of System 0, as it describes ultra-fast, pre-attentive data processing. In general, **the "meaning of a scene/image/phenomenon" is a network of sketches (a superposition of all sketches as an integrity/gestalt/holon)**. The basis of ultra-fast discrimination at any scale in System 0/1 is the embodied mechanism of the "Continuum of Discrimination/Distinction Tasks - CDT" (Universal Object Detection - Follow Anything: Compositional Physical Reasoning of Objects and Events; Rapid ensemble encoding of average scene features) [3].

Gerd Gigerenzer's concept of "fast and frugal heuristics" focuses on how systems "extract meaning" from limited data [14]. For him, the meaning of information is defined not by its volume (bits), but by its applicability within a specific environment. Gigerenzer argues that we possess a toolkit of specialized mechanisms for rapid decision-making (Meaning as Action). In LGP terms, this represents a set of ready-made "patterns" or "sketches" within System 0/1 that allow the system to ignore redundant noise (e.g., the "continuum of discrimination tasks"). The "less-is-more" effect suggests that simple models handle "fuzziness" and noise more effectively ("critical sketches" or the "thin-slicing" of heuristics in discrimination tasks). While Kahneman views System 1 as a source of errors (cognitive biases), Gigerenzer and Prokopchuk (LGP: System 0/1) see it as the pinnacle of biological design - a mechanism for the instantaneous extraction of meaning under constraints of time and resources. LGP reveals the mechanisms of implicit maturation of 'smart heuristics' within discrimination tasks [1].

It should be noted that the architecture of living systems exhibits fractal-

like and modular scaling laws for both information [15] and meaning (the principles of organization are replicated across scales: fundamental principles in self-organized architectures capable of prediction, memory, and purpose).

LGP-Architecture of Wholeness / Integrity, incorporating criticality (attractivity), largely integrates all approaches via the "System 0/1/2/3" concept. There is no "meaning-in-itself"; there is only meaning relative to a specific architecture (System 0/1/2/3). Meaning is hierarchical and contextual (self-modelling 'tangled hierarchies' [1]). **'Gist' represents the critical sketches in discrimination / distinction tasks** (gist-based intuition). The mathematics of LGP proves that operating with the "gist" reduces the system's computational complexity without a loss of functionality. Meaning is not a static thing, but rather the result of the interaction between data and the chosen level of its analysis. Information is "meaningful" if it allows the system to perform work while expending fewer energy/resources. If the system "understands" a signal - thanks to sketch networks and wholeness; proto-qualia as "a difference that makes a difference" - it can act efficiently (Meaning as "Compression for Action"). If it fails to understand, it wastes energy on processing chaos. Information acquires meaning only within the framework of a whole system, where every element is "aware" of the context of others. LGP includes computational models of how the 'brain' understands the "gist" of a scene almost instantaneously without recognizing individual objects (grasping the "gist" of a space based on System 0), as well as models of "rapid conceptual understanding."

Let us examine the core LGP entities that ensure wholeness (integrity).

The LGP metaphor of the 'Tangle of Mind' shows how any valid result is supported by an extensive, diverse, and branching network of other results (including scientific products). It serves as an illustration that in LGP there are no isolated facts - there is only a branching network of "sketches" that reinforce one another. It emphasizes the nonlinearity and entanglement of mental processes. A related concept is the Coherence Theory of Truth, where the truth of a statement depends on its connection to other statements.

Complexity as an epistemological problem: LGP is a fundamental epistemological paradigm that describes the mechanisms of transition from sensory noise to 'meaning as action' through reaching the (current) limit of generalization; local/global ontological coherence (a causal framework for ontological coherence in living/autonomous systems). It is argued that the System 0/1/2/3 architecture ensures both local and global ontological coherence. Example 1: The architecture guarantees that sensor-level data remains consistent with the global mission and product conceptualization (LGP-concepts of 'cognitive sensors' and 'artificial connectome'). Example 2: Local 'arrows of cognition' (within discrimination tasks) are aligned with the dynamic and expanding content of the overall Architecture. The framework provides a foundation for certifiable autonomous interpretation and offers a new perspective on governance, responsibility, and risk in AI-driven decision architectures.

Meaning-Making Acts (in LGP): ‘A difference which makes a difference’; Semiosis (COGs); Act of Choosing; Aha! Moment; Act of Emergence of the Event - Living Experience; ‘Grounding Act’; Act of Creating/Activating a New Sketch; Act of Heuristic Emergence (Inductor Space); Act of Expanding the Possibility Space of Any Pattern; System 1: Act of Quantum-Like Decoherence - Collapse of the Decision Wave Function; ‘Act of Understanding Uncertainty’ (human-dimensional scale).

Embodied networks of sketches can be of several types. They function as categorization operators within the combinatorial phase space of an autonomous system and 'permeate' all levels of System 0/1/2/3. Examples of these three basic network types are shown in Figures 1 (a) Attractive atomic sense networks: colors illustrate the degree of activity; b) Networks for distinction tasks, Networks of causal interpretive variables, Signaling Networks, Computational proto-qualia; c) Networks of image sketches: shading illustrates the process of forgetting more precise sketches; d) ‘Phase spot’ or energy convergence: attention/decoherence mechanisms).

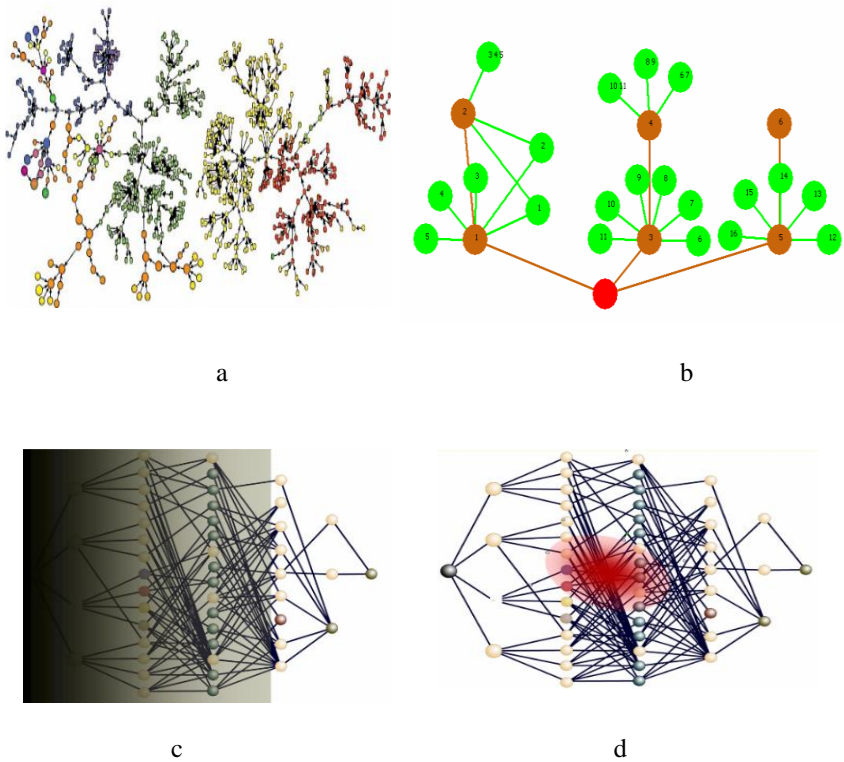


Figure 1 - Examples of sketch networks

The stream of thoughts during the process of solving coupled discrimination tasks generates a vast number of values for **causal interpretive variables** $\{z/Z_V\}$ (where V represents heuristics), reflecting the essence of phenomenal experience alongside sketch networks (or **proto-qualia**). Qualia correspond to the system's instantaneous resonance profile.

The System 0/1/2/3 iceberg metaphor [7]: The cognitive LGP-architecture is best visualized as an iceberg, where the transition from subconscious potential to conscious action follows a specific phase change: (Figure 2):

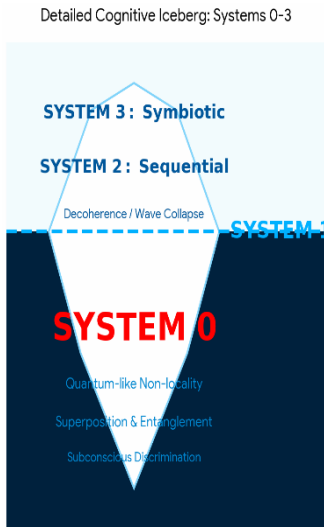


Figure 2 - Illustration of the metaphor

- **System 0** (The Submerged Core): A seething ocean of potentials. This is the realm of quantum-like non-locality, superposition, and entanglement. Here, discrimination tasks are solved subconsciously through "Creative Stirring" - a turbulence mechanism that prevents stagnation and constantly activates alternatives from the heuristic space.

- **System 1** (The Waterline): The critical interface of Crystallization and Decoherence. This is the moment of the decision wave function collapse, where a specific "sketch" emerges from the chaotic depths into conscious awareness.

- **System 2 & 3** (The Visible Peak): The domain of Sequential Logic (System 2) and Symbiotic Thinking (System 3). This layer handles high-level communication, meaning-based interaction, and the outsourcing of knowledge and actions to the environment.

Conclusion. LGP can serve as the foundation for a comprehensive theory of cognitive control. It acts not merely as an optimization method (the essence of 'attractivity'), but as a fundamental law for transforming data into knowledge, meaning, and action, ensuring the 'global ontological coherence' (integrity) of complex systems.

References

1. Prokopchuk Y. (2022). Intuition: The Experience of Formal Research. Dnipro, Ukraine : PSACEA Press. (in RU)
2. Prokopchuk Y. (2025). Combinatorial, expanding phase space of cognitive dynamic systems. XXVII International Scientific and Practical Seminar "Combinator Configurations and Their Applications". Zaporizhzhia–Kropyvnytskyi–Kiev, Ukraine: National University "Zaporizhzhia Polytechnic".

Pp.175 – 183.

3. Prokopchuk, Y. (2025). Designing Ecosystems of Intelligence: Logic of Fast Distinction. Materials of the 17th international scientific and practical conference «Modern Information and Innovative Technologies in Transport (MINTT-2025)». Odesa, Ukraine: Kherson State Maritime Academy. Pp.29 – 34.

4. Prokopchuk Y. (2025). System 0/1/2/3: Debates on the nature of (artificial) general intelligence. Materials of the 11th International Conference Adaptive Technologies in Learning Control (ATL – 2025). Odesa, Ukraine: South Ukrainian National Pedagogical University after K. D. Ushynsky. Pp. 14-20

5. Prokopchuk Y. (2025). Dark Matter of the Mind, Science's Blind Spot, Living (Formal) Structures, and Spirituality. Materials of the International scientific and practical conference “Scientific Activity as a Pathway to Developing Professional Competencies of Future Specialists - 2025”. Sumy, Ukraine: Sumy State Pedagogical University. Pp. 21 – 24.

6. Prokopchuk Y. (2025). Mathematical model of the meaning/gist of the signal/variable. Abstracts of the XIX International Conference ‘Modern Information and Communication Technologies on a Transport, in Industry and Education’. Dnipro, Ukraine: Ukrainian State University of Science and Technology. P.63 [in UA]

7. Prokopchuk Y. (2026). The Intertwined Nature of Simplicity and Complexity: A New Paradigm for Understanding Complex Adaptive / Autonomous / Living Self-Improving Smart Systems. Proceedings of the Scientific and Practical Conference «Information Technologies in Metallurgy and Machine building – ITMM 2026». Dnipro, Ukraine: Ukrainian State University of Science and Technologies.

8. Floridi, L. (2011). The Philosophy of Information. Oxford: Oxford University Press.

9. Kolchinsky, A., Wolpert, D. (2018). Semantic information, autonomous agency and non-equilibrium statistical physics. *Interface Focus*. 8(6):20180041. 10.1098/rsfs.2018.0041.

10. Krakauer, D. (2024). The Complex World: An Introduction to the Foundations of Complexity Science. In book: Foundational Papers in Complexity Science: Volume 1 10.37911/9781947864528.00.

11. Reyna, V. F. (2012). A new intuitionism: Meaning, memory, and development in fuzzy-trace theory. *Judgment and Decision Making*, 7(3), 332–359

12. Corbin, J. C., Reyna, V. F., Weldon, R. B., & Brainerd, C. J. (2015). How reasoning, judgment, and decision making are colored by gist-based intuition: A fuzzy-trace theory approach. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition*, 4(4), 344–355. <https://doi.org/10.1016/j.jarmac.2015.09.001>

13. Oliva A, Torralba A. (2006). Building the gist of a scene: the role of global image features in recognition. *Prog Brain Res*.155:23-36. doi:

10.1016/S0079-6123(06)55002-2.

14. Gigerenzer G., Todd P.M. (1999). Simple Heuristics That Make Us Smart. New York: Oxford University Press.

15. Pellis, S. (2025). Toward a Universal Theory of Fractal Information. SSRN Electronic Journal. 5(11):107. 10.2139/ssrn.5939098.

METHOD OF BIG VECTOR DATA PROCESSING

Volodymyr Riznyk, Maksym Hladchuk

Lviv Polytechnic National University

Abstract. Method of big vector data processing in torus or manifold coordinate systems based on two- or multidimensional combinatorial configurations examined in the paper. We refer to remarkable properties inherited in the two- or multidimensional models of the systems, namely the vector Ideal Ring Bundles. Vector IRBs are cyclic sequences of some vector sub-sequences that form basis of manifold coordinate system. A set of all modular sums of the sub-sequences forms two- or multidimensional coordinate grid over the manifold surface with common reference point. It was allowing direct reading sets of attributes and categories for big data as being indexed preliminary the numerical sub-sequences under the manifold coordinate system. We require the set of all manifold coordinate grid node points is one-to-one a set of indexed big data attributes and categories, as well as the set of all binary code combinations that has been created by this basis.

In recent times, many number of new models, conceptions, parallel algorithms, platforms, applications and processing gears, are developed to improve the value of big data technology [1- 10]. Big data technology, is known, can be defined as a software-utility that is designed to **analysis process** and **extract** the data from extremely complex and large data sets which the **traditional data processing software** could never deal with [1]. The big data sets again involve a number of indexes of infrastructure, such as economic, national defense, and other factors, which have led to difficulties. The papers [3- 5] present prospects and problems of big vector data for distant sensing. A techniques for compose of a [map procedure](#), which performs filtering, sorting, and a summary operations of big data presented at the IEEE International Conferences on Data Engineering [6]. Developing a reversible rapid coordinate transformation big vector data model for the cylindrical projection we see in paper [7]. The paper [8] contains fast multidimensional ensemble empirical mode decomposition for the analysis of big spatial-temporal datasets. The geometric computing algorithms are always very complex and time-consuming, which makes big spatial data processing very slow, even impossible. A framework that couples cloud and high-performance computing for the parallel

map projection of vector-based big spatial data regarded in [9]. The projection provides large-scale spatial modeling of big vector data under a common coordinate system. However, algorithmic complexity of the map projections represents a pressing computational challenge. Proposed approach grounds on remarkable properties of symmetry and asymmetry elegant ensembles, namely the concept of Ideal Ring Bundles (IRB)s [10].

Ideal ordered chain combinatorial structures

The ordered chain method constructing elements and evens is known to be of widespread applicability when applied to the problem of finding optimum ordered arrangement of structural elements in a distributed technological system. Let us calculate all sums S_n of the terms in the numerical n -stage chain sequence of distinct positive integers $C_n = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$, where we require all terms in each sum to be consecutive elements of the sequence. Clearly the maximum number of distinct sums is

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2 \tag{1}$$

If we regard the chain n -stage sequence $C_n = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ as being cyclic, so that K_n is followed by K_1 , we call this a ring sequence. of distinct positive integers $K_{1D} = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, where we require all terms in each sum to be consecutive elements of the sequence as being cyclic, so that k_n is followed by k_1 , we call this a ring sequence. A sum of consecutive terms in the ring sequence can have any of the n terms as its starting point, and can be of any number of terms from 1 to $n - 1$. In addition, there is the sum T of all n terms, which is the same independent of the starting point. Hence the maximum number of distinct sums S_n^* of consecutive terms of the ring sequence is given by

$$S_n^* = n(n-1)+1 \tag{2}$$

Comparing the equations (1) and (2) we see that the number of sums S_n^* for consecutive terms in the ring topology is nearly double the number of sums S_n in the daisy-chain topology for the same sequence C_n of n terms.

Ideal Ring Bundles

An n -stage sequence $C_n = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ of natural numbers for which the set of all S_n^* circular sums consists of the numbers $S_n^* = n(n-1)+1 = n^2 - n + 1$ (each number occurs exactly once) is called an “Ideal Ring Bundle” (IRB). Here is an example of an IRB with $n= 5$ and $S_n^* = 5^2 - 5 + 1 = 21$, namely $\{1, 3, 10, 2, 5\}$. To see this, we observe:

1=1	6= 5+1	11=2+5+1+3	16= 1+3+10+2
2=2	7=2+5	12=10+2	17= 10+2+5
3=3	8=2+5+1	13=3+10	18=10+2+5+1
4=1+3	9=5+1+3	14=1+3+10	19=5+1+3+10
5=5	10=10	15=3+10+2	20=3+10+2+5
			21=1+3+10+2+5

Note that if we allow summing over more than one complete revolution around the ring, we can obtain all positive integers as such sums. Thus: $22=1+3+10+2+5+1$, $23= 2+5+1+3+10+2$, etc.

Next, we consider a more general type of IRB, where the S_n^* ring-sums of consecutive terms give us each integer value from 1 to N , for some integer N , exactly R times, as well as the value $N+1$ (the sum of all n terms) exactly once. Here we see that:

$$N= n(n-1)/R \tag{3}$$

An example with $n=4$ and $R=2$, so that $N=6$, is the ring sequence $\{1,1,2,3\}$, for which the sums of consecutive term are: $1,1,2,3;$

$1+1=2, 1+2=3; 2+3=5, 3+1=4; 1+1+2=4, 1+2+3=6, 2+3+1=6, 3+1+1=5.$

We see that each ‘‘circular sum’’ from 1 to 6 occurs exactly twice ($R=2$). This IRB has the parameters $n=4, R=2$.

Definition.

Ideal Ring Bundle (IRB) is cyclic sequence of positive integers which forms perfect partitions of a finite interval $[1, S]$ of integers. The sums of connected sub-sequences of an IRB enumerate the set of integers $[1, S-1]$ exactly R -times.

2D Vector Ideal Ring Bundle.

Let us calculate all S sums of the terms in the n -stage chain sequence of non-negative integer 2-stage sub-sequences (2D vectors) of the sequence $K_{2D} = \{(k_{11}, k_{12}), (k_{21}, k_{22}), \dots, (k_{i1}, k_{i2}), \dots, (k_{n1}, k_{n2})\}$ as being cyclic, so that (k_{n1}, k_{n2}) is followed by (k_{11}, k_{12}) . We require all terms in each modular 2D vector sum to be consecutive elements of the cyclic sequence, and a modulo sum m_1 of k_{i2} and a modulo sum m_2 of k_{i1} are taken, respectively. A modular (mod $m_1, \text{ mod } m_2$) 2D vector sum of consecutive terms in this sequence can have any of the n terms as its starting point, and can be of any length (number of terms) from 1 to $n-1$. Hence, the maximum number of such sums is given by

$$S = n (n-1) \tag{4}$$

If we require all modular vector sum of consecutive terms give us each vector value exactly R times, that

$$S_R = n(n-1)/R \tag{5}$$

An n -stage ring sequence K_{2D} , for which the set of all two-modular vector-sums (mod $m_1, \text{ mod } m_2$) forms two-dimensional grid over torus $m_1 \times m_2$, where each node of the grid occurs exactly R -times, is named two-dimensional Ideal Ring Bundle (2D IRB) with parameters n, R , and m_1, m_2 [11].

Example. Two-dimensional ($t=2$) vector IRB containing four ($n=4$) two-dimensional vectors $k_1= (0,1), k_2= (1,3), k_3=(0,2), k_4=(2,3)$ is depicted in a graph (Figure 1).

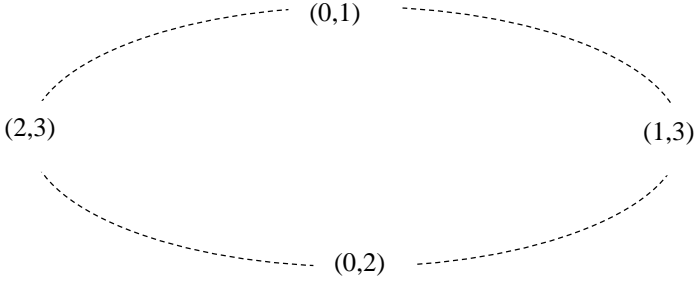


Fig. 1- A graph of the 2D vector IRB $\{(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)\}$ with parameters $S=13, n=4, R=1, m_1=3, m_2=4$

Regarding ring configuration of the 2D vector IRB $\{(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)\}$ in the graph (Figure 1), we can calculate easily all two-dimensional ring vector-sums, taking complex modulo $m_1=3$, and $m_2=4$:

$$\begin{aligned}
 (1,0) &\equiv (0,1) + (1,3); \\
 (1,1) &\equiv (1,3) + (0,2); \\
 (2,1) &\equiv (0,2) + (2,3); \\
 (2,0) &\equiv (2,3) + (0,1); \\
 (0,0) &\equiv (1,3) + (0,2) + (2,3); \\
 (1,2) &\equiv (0,1) + (1,3) + (0,2); \\
 (2,2) &\equiv (0,2) + (2,3) + (0,1); \\
 (0,3) &\equiv (2,3) + (0,1) + (1,3).
 \end{aligned}$$

So long as the vectors $(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)$ of the ring sequence themselves are circular 2D vector-sums too, the complete set of these vector sums:

$$\begin{array}{cccc}
 (0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) \\
 (1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) \\
 (2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3)
 \end{array}$$

The result of the calculation forms two-dimensional ($t=2$) grid over torus surface grid 3×4 , where 2D modular coordinates of each node of the grid occurs exactly once ($R=1$). The vector code based on the IRB $\{(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)\}$ allows on vector data coding in intelligent toroidal coordinate system in the 3×4 grid a data set of two ($t=2$) attributes with three ($m_1=3$) categories of the first, and four ($m_2=4$) ones for the second attribute accordingly.

Torus coordinate system based on vector Ideal Ring Bundles

To configure torus coordinate system based on vector Ideal Ring Bundle let us take in consideration the ring sequence of the 2D vectors $\{(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)\}$, namely the two-dimensional ($t=2$) Ideal Ring Bundle with parameters $S=13, n=4, R=1, m_1=3, m_2=4$, where $S = n(n-1)/R+1$, and $m_1 = n(n-1)=3, m_2=n=4$ (Table 1).

Regarding ring configuration of the 2D vector IRB $\{(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)\}$ in the graph (Figure 1), we can calculate easy all two-dimensional ring vector-sums, taking complex modulo $m_1=3$, and $m_2=4$:

$$\begin{aligned} (1,0) &\equiv (0,1) + (1,3); (1,1) \equiv (1,3) + (0,2); \\ (2,1) &\equiv (0,2) + (2,3); \\ (2,0) &\equiv (2,3) + (0,1); \\ (0,0) &\equiv (1,3) + (0,2) + (2,3); \\ (1,2) &\equiv (0,1) + (1,3) + (0,2); \\ (2,2) &\equiv (0,2) + (2,3) + (0,1); \\ (0,3) &\equiv (2,3) + (0,1) + (1,3). \end{aligned}$$

So long as the vectors $(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)$ of the ring sequence themselves are circular 2D vector-sums too, the complete set of these vector sums:

$$\begin{matrix} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) \end{matrix}$$

The result of the calculation forms two-dimensional ($t=2$) grid over torus surface grid 3×4 , where 2D modular coordinates of each node of the grid occurs exactly once ($R=1$). The vector code based on the IRB $\{(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)\}$ allows on vector data coding in intelligent toroidal coordinate system in the 3×4 grid a data set of two ($t=2$) attributes with three ($m_1=3$) categories of the first, and four ($m_2=4$) ones for the second attribute accordingly.

To configure torus coordinate system based on vector Ideal Ring Bundle let us take in consideration the ring sequence of the 2D vectors $\{(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)\}$, namely two-dimensional ($t=2$) Ideal Ring Bundle with parameters $S=13$, $n=4$, $R=1$, $m_1=3$, $m_2=4$, where $S = n(n-1)/R+1$, and $m_1 = n(n-1)=3$, $m_2=n=4$ (Table 1).

Table 1

Node points of reference coordinate grid 3×4 created by modular vector sums ($m_1=3, m_2=4$) using 2D Ideal Ring Bundle $\{(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)\}$

No	Node point	The first vector	The second vector	The third vector
1	(0,0)	(1,3)	(0,2)	(2,3)
2	(0,1)	(0,1)	-	-
3	(0,2)	(0,2)	-	-
4	(0,3)	(2,3)	(0,1)	(1,3)
5	(1,0)	(0,1)	(1,3)	-
6	(1,1)	(1,3)	(0,2)	-
7	(1,2)	(0,1)	(1,3)	(0,2)
8	(1,3)	(1,3)	-	-
9	(2,0)	(2,3)	(0,1)	-
10	(2,1)	(0,2)	(2,3)	-
11	(2,2)	(0,2)	(2,3)	(0,1)
12	(2,3)	(2,3)	-	-

Table 1 contains $n(n-1)=12$ node points of reference coordinate grid created by modular vector sums ($m_1=3, m_2=4$) using 2D Ideal Ring Bundle $\{(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)\}$. The result of the calculation forms two-dimensional ($t=2$) grid over torus surface grid 3×4 , where 2D modular coordinates of each node of the grid occurs exactly once ($R=1$). Planar projection of spatially disjointed the ring axes $m_1 = 2$ and $m_2 = 3$ coordinate points of two- dimensional ($t = 2$) toroid reference grid $m_1 \times m_2 = 3 \times 4$ with common reference point $(0,0)$ given in Figure 2.

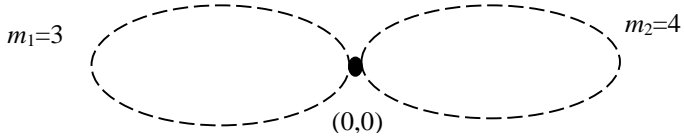


Fig. 2 - Planar projection of spatially disjointed the ring axes $m_1 = 2$ and $m_2 = 3$ coordinate points of two- dimensional ($t = 2$) toroid reference grid $m_1 \times m_2 = 3 \times 4$ with common reference point $(0,0)$

Schematic model of torus coordinate system given as the simplest and well useful presentation of combinatorial optimization of vector data coding and processing based on remarkable properties of two- and multidimensional Ideal Ring Bundles. A more general model of the t -dimensional intelligent toroidal coordinate system for vector data coding made from multidimensional combinatorial configurations that provide an ability to reproduce the maximum number of vectors in the system with IRB of appropriate dimensionality.

Binary 2D optimized vector data code

The binary 2D vector code based on the IRB $\{(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)\}$ in intelligent toroidal coordinate system $m_1 \times m_2 = 3 \times 4$ presented in Table 2.

Table 2

Binary 2D vector code based on the Ideal Ring Bundle $\{(0,1), (1,3), (0,2), (2,3)\}$ in intelligent torus coordinate system of sizes 3×4

No	Vector	Digit 1	Digit 2	Digit 3	Digit 4
		(0,1)	(1,3)	(0,2)	(2,3)
1	(0,0)	0	1	1	1
2	(0,1)	1	0	0	0
3	(0,2)	0	0	1	0
4	(0,3)	1	1	0	1
5	(1,0)	1	1	0	0
6	(1,1)	0	1	1	0
7	(1,2)	1	1	1	0
8	(1,3)	0	1	0	0
9	(2,0)	1	0	0	1
10	(2,1)	0	0	1	1
11	(2,2)	1	0	1	1
12	(2,3)	0	0	0	1

The vector code based on the IRB $\{(0,1),(1,3),(0,2),(2,3)\}$ provides 2D vector data coding design in intelligent toroidal coordinate system in the 3×4 grid. Table 2 contains $n(n-1)=12$ binary four-digit ($n=4$) combinations for coding two attributes ($t=2$) both with three ($m_1=3$) category of the first, and four ($m_2=4$) – the second attribute concurrently. In general case a t -dimensional coordinate system formed by t -dimensional IRB is spatial coordinate grid of fixed sizes $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_t$, which covers surface of a spatial manifold. A set of all node point's grid of the system created by summing minimized sub-set of the set taking complex modulo m_1, m_2, \dots, m_t to complete the t -dimensional coordinate system [11]. A more general model of the t -dimensional intelligent toroidal coordinate system for vector data coding made from multidimensional combinatorial configurations that provide an ability to reproduce the maximum number of vectors in the system with a limited number n of appropriate IRB for needed set of attributes and categories in optimized basis.

References

1. Y. Xiaochuang, and Li Guoqing (13 February 2018). Big spatial vector data management: a review. *Big Earth Data*. Vol.2, No1, 108-129.
2. N.R.Bose (2017). *Applied Multidimensional Systems Theory*. Springer Int. Publishing AG 2017, Pensilvania State University State College, PA, USA, 192 p.
3. M. Chi, A.Plaza, J.A.,Benediktsson, Z. Sun, J. Shen, and Y. Zhu (13 September 2016). Big data for remote sensing: Challenges and opportunities. *IEEE*, 104 (11), 2207–2219.
4. Y.Ma, H. Wu, L. Wang, B.Huang, R. Ranjan, A. Zomaya, and W. Jie, (01 October 2015). Remote sensing big data computing: Challenges and opportunities. *Future Generation Computer Systems*, 51, 47–60.
5. M. K. Pekturk, and M. Unal, (May 15–18, 2017). A review on real-time big data analysis in remote sensing applications,” 25th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU), Antalya, Turkey,
6. A.Eldawy Viz Hadoop (16-20 May 2016). A MapReduce framework for extensible visualization of big spatial data. *IEEE. The 32nd IEEE International Conference on Data Engineering*, Helsinki, Finland.
7. S.Ye, T. Yan, Y. Yue, W. Lin, L. Li, X.Yao, D. Zhu (01 April 2016). Developing a reversible rapid coordinate transformation model for the cylindrical projection, *Computers & Geosciences*, 89, 44–56.
8. Z.Wu, J.Feng, F. Qiao, and Z. Tan - M. (13 April 2016). Fast multidimensional ensemble empirical mode decomposition for the analysis of big spatio-temporal datasets, *Philos Trans A Math Phys Eng Sci*, 374(2065).
9. W.Tang, and W. Feng (01 January 2017). Parallel map projection of vector-based big spatial data: Coupling cloud computing with graphics processing units. *Computers, Environment and Urban Systems*, 61, 187–197.
10. V. Riznyk (2017). *Multi-modular Optimum Coding Systems Based on Remarkable Geometric Properties of Space*. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Springer. Vol.512, 129–148.

ON CLOSED DISTANCE MAGIC LABELING AND THE FRACTIONAL DOMINATION NUMBER OF THE GRAPH $K_n \circ G$

Marina Semeniuta

Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

ПРО ЗАКРИТУ ДИСТАНЦІЙНУ МАГІЧНУ РОЗМІТКУ ТА ЧИСЛО ДРОБОВОГО ДОМІНУВАННЯ ГРАФУ $K_n \circ G$

Марина Семенюта

Центральноукраїнський національний технічний університет

Abstract. Для лексикографічного добутку $K_n \circ G$ встановлено необхідні умови існування $\{0,1\}$ -дистанційної магічної розмітки в термінах дробового числа домінування графу G . Отримано формулу для магічної константи графу $K_n \circ G$ та співвідношення між дробовими числами домінування графів G і $K_n \circ G$. Для графів C_m , $K_{r,s}$ і P_m виведено необхідні умови існування $\{0,1\}$ -дистанційної магічної розмітки.

All graphs considered in this paper are finite undirected graphs without multiple edges and loops. Distance magic labelings were introduced as bijections from the vertex set of a graph onto a set of natural numbers such that the sums of labels over the open or closed neighborhoods of all vertices are constant [1-3]. Later, this concept was extended to D -distance, balanced, group, and other types of magic labelings [4-5].

Consider a graph $G = (V, E)$ with a vertex labeling φ and an arbitrary subset of distances $D \subseteq \{0, 1, 2, \dots, \text{diam}(G)\}$. The D -neighborhood of a vertex $v \in V(G)$ is defined as $N_D(v) = \{u \in V(G) \mid d_G(v, u) \in D\}$, where $d_G(v, u)$ denotes the distance between the vertices v and u . The D -weight $w(v)$ (or $w_\varphi(v)$) of a vertex $v \in V(G)$ is the sum of labels of the vertices from its D -neighborhood, that is, $w(v) = \sum_{u \in N_D(v)} \varphi(u)$.

A D -distance magic labeling of a graph $G = (V, E)$ of order n is a bijection $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ such that $w(v) = k = \text{const}$ for all $v \in V(G)$. The constant k is called the magic constant of the labeling φ , and the graph G is called D -distance magic. This approach was proposed by A. O'Neal and P. Slater in [8] as a generalization of existing results on magic labelings based on metric properties of graphs.

The choice of the set D determines a particular subclass of labelings: for $D = \{1\}$, we obtain the classical distance magic labeling; for $D = \{0, 1\}$, its generalization known as a Σ' -labeling or a $\{0, 1\}$ -distance magic labeling; if $D = \{l\}$, where $0 < l < \text{diam}(G)$, the labeling is called an l -vertex magic labeling.

In this paper, we establish conditions for the existence of a $\{0, 1\}$ -distance magic labeling of the lexicographic product of graphs. S. Beena obtained general structural properties of graphs admitting such a labeling, derived parameter restrictions for basic graph classes, established a connection with distance magic labelings, and also showed that every graph is an induced subgraph of a regular

$\{0, 1\}$ -distance magic graph [2]. These results provided the foundation for further investigations, which were systematized and extended in [4-5, 8-10].

The relationship between $\{0, 1\}$ -distance magic labelings and the spectral theory of graphs was demonstrated in [11]. In particular, it was shown that the presence of the eigenvalue -1 in the spectrum of a graph is a necessary condition for the existence of such a labeling. Moreover, in several cases the construction of these labelings in [11] was reduced to the problem of partitioning the set of labels into subsets with prescribed sums. This enabled the authors to combine spectral and combinatorial methods in the study of certain classes of graphs and their strong products. A. O'Neal and P. Slater proved the uniqueness of the magic constant of a D -distance magic labeling in terms of fractional domination [8]. In this paper, the open problem of the existence of a $\{0, 1\}$ -distance magic labeling for the lexicographic product $K_n \circ G$ is considered.

Definition 1 [12]. The lexicographic product of graphs G_1 and G_2 is the graph $G_1 \circ G_2$ with vertex set $V(G_1) \times V(G_2)$, where two vertices (u_1, v_1) and (u_2, v_2) are adjacent in $G_1 \circ G_2$ if and only if either $(u_1, u_2) \in E(G_1)$, or $u_1 = u_2$ and $(v_1, v_2) \in E(G_2)$. It is known that the graph $G_1 \circ G_2$ is connected whenever G_1 is connected and $|V(G_2)| \geq 2$.

For a graph G , the closed neighborhood $N_G[u]$ of a vertex $u \in V(G)$ is defined by $N_G[u] = \{v \in V(G) | d_G(v, u) \leq 1\}$, that is, $N_G[u]$ is the $\{0, 1\}$ -neighborhood of the vertex u .

Definition 2 [13]. A set $M \subseteq V(G)$ is called a dominating set if for every vertex $v \in V(G)$ there exists a vertex $u \in M$ such that $v \in N_G[u]$. Equivalently, a set $M \subseteq V(G)$ is dominating if $\bigcup_{u \in M} N_G[u] = V(G)$. The domination number $\gamma(G)$ is defined as the minimum cardinality among all dominating sets of the graph G .

There exist fractional analogues of the concepts introduced in Definition 2.

Definition 3 [13]. Let $A(G)$ be the adjacency matrix of a graph G , let E be the identity matrix of order $|V(G)|$, and $I = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$. The fractional domination number $\gamma_f(G)$ is defined as the optimal solution of the following linear programming problem:

$$\gamma_f(G) = \min\{I^T \mathbf{y} \mid (A(G) + E)\mathbf{y} \geq I, \mathbf{y} \geq 0\}, \quad (1)$$

where $\mathbf{y} = (y_v)_{v \in V(G)}$ is a vector of vertex weights, that is, each vertex $v \in V(G)$ is assigned a nonnegative real number $y_v \geq 0$.

In problem (1), the variables y_v may take arbitrary nonnegative real values. If they are restricted to binary values, that is, if $y_v \in \{0, 1\}$, $v \in V(G)$, then the vector \mathbf{y} determines a subset of vertices $M = \{v \in V(G) \mid y_v = 1\}$. The condition $(A(G) + E)\mathbf{y} \geq I$ means that for every vertex $v \in V(G)$, $\sum_{u \in N_G[v]} y_u \geq 1$, that is, each vertex either belongs to the set M or is adjacent to a vertex from M . Hence, M is a dominating set, and in this case problem (1) reduces to the problem of finding a dominating set of minimum cardinality, whose optimal value is equal to $\gamma(G)$.

Consider the lexicographic product of the complete graph K_n and an arbitrary graph G of order m . If $n = 1$, then $K_1 \circ G \cong G$. If $m = 1$ then $G \cong K_1$,

and therefore $K_n \circ G \cong K_n$. We establish a system of necessary conditions for the existence of a $\{0, 1\}$ -distance magic labeling in the nontrivial cases of the graph $K_n \circ G$.

Theorem 1. Let G be a graph of order $m \geq 2$, let $n \geq 2$ and suppose that the graph $K_n \circ G$ admits a $\{0, 1\}$ - distance magic labeling. Then one of the following cases holds:

1. If $\gamma_f(G) \neq 1$, then the sums of labels of vertices in all copies of the graph G coincide and are equal to $\frac{m(mn+1)}{2} \in N$.

2. If $\gamma_f(G) = 1$, then $K_n \circ G \cong K_{mn}$.

Based on the structural properties of the sums of labels in copies of the graph G obtained in Theorem 1, the value of the magic constant for the lexicographic product $K_n \circ G$ is determined in Theorem 2.

Theorem 2. If the graph $K_n \circ G$ admits a $\{0, 1\}$ -distance magic labeling and $m = |V(G)|$, then its magic constant C is given by

1. $C = \frac{m(mn+1)((n-1)\gamma_f(G)+1)}{2\gamma_f(G)}$ if $\gamma_f(G) \neq 1$;

2. $C = \frac{(mn+1)mn}{2}$ if $\gamma_f(G) = 1$.

The determination of the magic constant makes it possible to establish an explicit relationship between the fractional domination number of the product $K_n \circ G$ and the corresponding parameter of the factor G , which is presented in Corollary 1.

Corollary 1. If $K_n \circ G$ is a $\{0, 1\}$ -distance magic graph, then $\gamma_f(K_n \circ G) = \frac{n\gamma_f(G)}{(n-1)\gamma_f(G)+1}$ if $\gamma_f(G) \neq 1$ and $\gamma_f(K_n \circ G) = 1$ if $\gamma_f(G) = 1$.

Assume that $K_n \circ G$ is a $\{0, 1\}$ -distance magic graph and $\gamma_f(G) \neq 1$. We investigate the conditions imposed on the parameters of the graph G , when G is isomorphic to one of the graphs from the set $\{C_m, K_{r,s}\}$.

Corollary 2.

1. If the graph $K_n \circ C_m$, $m > 3$, is $\{0, 1\}$ -distance magic, then $m \equiv 1 \pmod{2}$ and $n \equiv 1 \pmod{2}$.

2. If the graph $K_n \circ K_{r,s}$, where $m = r + s > 3$, is $\{0, 1\}$ - distance magic, then one of the following conditions holds:

$$r \equiv 1 \pmod{2}, \quad s \equiv 1 \pmod{2}$$

or

$$n \equiv 1 \pmod{2}, \quad m \equiv 1 \pmod{2}.$$

3. If the graph $K_n \circ P_m$ is $\{0, 1\}$ -distance magic, then one of the following conditions holds:

$$\begin{aligned} & 1) \quad m \equiv 3 \pmod{6}; \\ & 2) \quad n \equiv \frac{m+5}{6} \left(\pmod{\frac{m+2}{3}} \right), \quad m \equiv 1 \pmod{6}; \\ & 3) \quad n \equiv \frac{m+8}{12} \left(\pmod{\frac{m+2}{6}} \right), \quad m \equiv 4 \pmod{12}; \end{aligned}$$

$$4) n \equiv 1 \left(\text{mod} \frac{m+1}{3} \right), \quad m \equiv 2 \pmod{6};$$

$$5) n \equiv 1 \left(\text{mod} \frac{m+1}{6} \right), \quad m \equiv 5 \pmod{6}.$$

If $m \equiv 0 \pmod{6}$ or $m \equiv 10 \pmod{12}$, then the graph $K_n \circ P_m$ does not admit a $\{0,1\}$ -distance magic labeling.

In this paper, an approach to the study of $\{0,1\}$ -distance magic labelings of lexicographic products of graphs based on the fractional domination number is proposed. The obtained results make it possible to relate the structural properties of the graph G to the parameters of a magic labeling of the graph $K_n \circ G$ and to reduce the existence problem for such labelings to the analysis of arithmetic conditions on the parameters of the factor graphs. Necessary conditions for the existence of $\{0,1\}$ -distance magic labelings are obtained for cycles, complete bipartite graphs, and paths.

The obtained results may be used in the further study of $\{0,1\}$ -distance magic labelings of other graph classes and graph products.

References

1. Vilfred V. Sigma labelled graphs and circulant graphs. Ph.D. Thesis, University of Kerala, India. 1994. 133 p.
2. Beena S. On Σ and Σ' labelled graphs. *Discrete Mathematics*. 2009. Vol. 309. P. 1783-1787. DOI:10.1016/j.disc.2008.02.038
3. Sugeng K.A., Froncek D., Miller M., Ryan J., Walker J. On distance magic labeling of graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*. 2009. Vol. 71. P. 39-48.
4. Rupnow R. A survey of distance magic graphs. Master's report / Michigan Technological University. Houghton, 2014. 77 p.
<https://doi.org/10.37099/mtu.dc.etsd/829>
5. Arumugam S., Froncek D., Kamatchi N. Distance magic graphs – a survey. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*. 2011. Vol. 17, No. 1. P. 11–26.
6. Pfeiffer H. Distance magic labelings. Master's thesis, Charles University, Prague. 2024. 42 p.
7. Semeniuta M.F., Nedilko S. N., Nedilko V. N. Bimagic Vertex Labelings. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. V. 54. P. 771-778. DOI: 10.1007/s10559-018-0079-z
8. O'Neal A., Slater P. An introduction to distance D magic graphs. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*. Special Edition. 2011. P. 89-107. DOI: 10.22342/jims.0.0.22.89-107
9. Arumugam S., Kamatchi N., Vijayakumar G. R. On the uniqueness of D -vertex magic constant. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*. 2014. Vol. 34, Issue 2. P. 279-286. DOI: 10.7151/dmgt.1728
10. Semeniuta M. F. Balanced Zero-Neighborhood Labeling of Generalized Petersen Graphs. 2025. V. 61. P. 934-942. DOI:10.1007/s10559-025-00826-3

11. Anholcer M., Cichacz S., Peterin I. Spectra of graphs and closed distance magic labelings. *Discrete Mathematics*. 2016. Vol. 339, Issue 7. P. 1915-1923. DOI: 10.1016/j.disc.2015.12.025

12. Hammack R. H., Imrich W., Klavžar S. *Handbook of product graphs*. Second edition. Taylor & Francis Group. 2011. 536 p.

13. Goddard W., Henning M. A. Fractional dominating parameters. *Developments in Mathematics*. 2020. P. 349-363. DOI: 10.1007/978-3-030-51117-3_10

NETWORK-BASED OPTIMIZATION OF COLLABORATIVE DECISION-MAKING IN AIRCRAFT PRE-FLIGHT MAINTENANCE

¹Sikirda Yu., ²Shmelova T., ³Syroizhka I.

^{1,3}*Ukrainian State Flight Academy*

²*National University "Kyiv Aviation Institute"*

Abstract. Modern aviation systems operate as complex socio-technical environments that require coordinated interaction among maintenance personnel, ground operators, and other aviation stakeholders. One of the most critical operational stages is aircraft pre-flight maintenance, where delays or coordination failures can affect flight safety, operational reliability, and schedule efficiency. The study focuses on improving collaborative decision-making among maintenance specialists during pre-flight preparation. Deterministic individual and collaborative decision-making models were developed using the Critical Path Method and expert judgment techniques. The proposed approach was tested on the example of the An-26 aircraft. Network graphs and structural-time tables were constructed to analyze maintenance procedures before and after optimization. Computational analysis performed using MS Excel and Python demonstrated that optimization of collaborative workflows significantly reduces maintenance duration. The results show that pre-flight maintenance time can be reduced by up to 22.42% (or 48.81%) through improved coordination and task parallelization. The findings confirm that structured collaboration improves operational efficiency while maintaining safety requirements.

Introduction. Modern air transport is characterized by a high level of technological complexity and operational interdependence among multiple stakeholders. Aircraft maintenance processes play a critical role in ensuring flight safety and operational reliability. According to aviation safety statistics, human factors account for approximately 70–80% of aviation incidents worldwide, highlighting the importance of effective coordination among aviation specialists [1; 2]. In Ukraine, 55 civil aviation accidents and incidents were reported in 2024, distributed as in Fig. 1 [3].

Aircraft pre-flight maintenance is a routine yet safety-critical procedure performed between aircraft arrival and departure. It includes inspection, system checks, fueling preparation, cargo handling, and final readiness verification. Inefficient coordination among maintenance personnel can lead to delays, increased operational costs, and reduced system reliability [4].

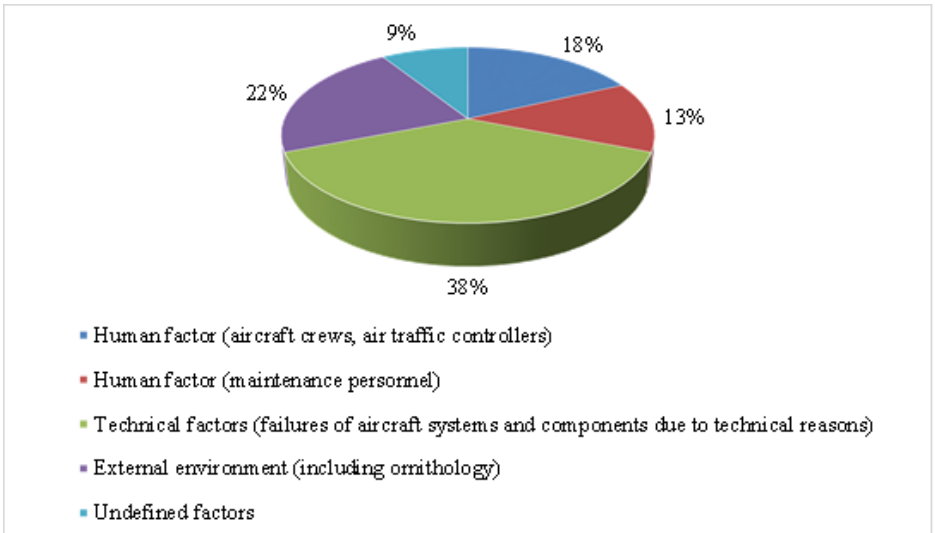


Fig. 1 – Classification of causal factors for aviation accidents and incidents

Collaborative decision-making (CDM) has become an essential management approach in aviation operations. It enables stakeholders to share information, coordinate actions, and make joint operational decisions. CDM has been successfully applied in air traffic management, airport operations, and logistics systems to improve efficiency and reduce delays [5; 6]. However, its application to aircraft maintenance processes remains insufficiently studied.

Therefore, optimizing collaboration among maintenance personnel during pre-flight preparation represents an important research problem in aviation operations management.

Problem statement and research objectives. Despite the widespread adoption of collaborative decision-making principles in aviation, practical coordination among maintenance personnel during pre-flight procedures remains limited. Poor communication and inefficient task scheduling may increase maintenance duration and reduce operational efficiency [4].

The purpose of the study is to optimize CDM during aircraft pre-flight maintenance in order to improve coordination among maintenance specialists and reduce the overall duration of maintenance procedures.

The research objectives include:

- development of deterministic models for individual and collaborative decision-making;
- application of the Critical Path Method (CPM) to analyze maintenance task sequences;
- optimization of maintenance workflows through task parallelization and redistribution of time reserves;
- evaluation of the effectiveness of the proposed approach using a practical aircraft maintenance scenario.

Methods. The study is based on deterministic modeling and network planning techniques widely used in operations management and engineering systems analysis.

The duration of maintenance tasks was determined using the Expert Judgment Method (EJM), which collects and aggregates estimates from experienced aviation technicians [7]. This method allows reliable determination of task duration parameters when statistical data are limited.

The CPM was applied to analyze the sequence of maintenance operations and identify critical tasks affecting total maintenance duration [8]. The method enables calculation of:

- early and late start times of tasks;
- time reserves for non-critical operations;
- total project duration;
- critical path of maintenance procedures

Optimization of collaborative decision-making was performed using three main strategies:

- redistribution of time reserves;
- parallel execution of tasks;
- integration of individual maintenance workflows into a collaborative operational model

Computational analysis was performed using spreadsheet tools and algorithmic calculations implemented in Python programming language.

Results. The proposed methodology was applied to the analysis of pre-flight maintenance procedures for the An-26 aircraft [9]. Maintenance operations were performed by three categories of personnel:

- aircraft structures and engines specialist (ASES);
- avionics specialist (ARES);
- ground operator (GO).

Network modeling revealed that inefficient coordination among maintenance personnel increases the total duration of maintenance procedures.

Before optimization, maintenance tasks were performed sequentially according to standard operational procedures. After implementation of CDM mechanisms, several tasks were executed simultaneously, reducing idle time and improving workflow efficiency.

The structural-time table of maintenance personnel actions during pre-flight maintenance of the An-26 before and after optimization is listed in Table 1.

Table 1

The structural-time table of maintenance personnel actions during pre-flight maintenance of the An-26 (before and after optimization)

№	Work content	Preliminary work	Duration of work before optimization, hours	Human resources before optimization	Duration of work after optimization, hours	Human resources after optimization
1	Connecting the aerodrome power supply		0.10	S_{ARES}	0.10	S_{ARES}
2	Uncovering the aircraft	1	0.28	S_{ASES} or S_{ARES}	0.14	$S_{ASES} + S_{ARES}$
3	Preparing for fueling	2	0.22	S_{ASES}	0.22	S_{ASES}
4	Removing plugs and covers, removing the grounding cable	17	0.25	S_{ASES} or S_{ARES}	0.125	$S_{ASES} + S_{ARES}$
5	Checking the completeness and handing over the aircraft	4; 14	0.13	$S_{ASES} + S_{ARES}$	0.13	$S_{ASES} + S_{ARES}$
6	Towing the aircraft to the engine start location	5	0.25	S_{ASES} or S_{ARES}	0.25	S_{ASES}
7	Final inspection	6	0.03	S_{ASES} or S_{ARES}	0.03	S_{ARES}
8	Establishing communication and monitoring engine start	7	0.27	S_{ASES} or S_{ARES}	0.27	S_{ASES}
9	Disconnecting the aircraft intercom and power source	8	0.02	S_{ARES}	0.02	S_{ARES}
10	Taxiing control	9	0.20	S_{ASES} or S_{ARES}	0.20	S_{ASES}

11	Filling the electric thermos and kettle	16	0.15	S_{ASES} or S_{ARES} or S_{GO}	0.15	S_{ARES}
12	Checking the ramp locks	15	0.12	S_{ASES} or S_{ARES} or S_{GO}	0.12	S_{GO}
13	Checking the ramp after loading	11	0.01	S_{ASES} or S_{ARES} or S_{GO}	0.01	S_{GO}
14	Checking the carriage brakes	13	0.03	S_{ASES} or S_{ARES} or S_{GO}	0.03	S_{GO}
15	Checking the hooks	14	0.03	S_{ASES} or S_{ARES} or S_{GO}	0.03	S_{GO}
16	Loading baggage	1	0.80	S_{ASES} or S_{ARES} or S_{GO}	0.80	S_{GO}
17	Fueling	3	0.25	S_{ASES}	0.25	S_{ASES}

The critical path of maintenance workflows before optimization passes through the following nodes:

– with the participation of the GO:

1→16→11→13→14→15→12→5→6→7→8→9→10 (1.94 hours);

– without the participation of the GO:

1→2→3→17→4→16→11→13→14→15→12→5→6→7→8→9→10 (2.94 hours).

The critical path of maintenance workflows after optimization with the participation of the GO passes through the following nodes:

1→16→13→14→15→12→5→6→8→9→10 (1.76 hours).

For non-critical maintenance works No. 2 and No. 4, a 50% reduction in duration was achieved by having them executed simultaneously by two maintenance specialists (ASES + ARES). It is not possible to reduce the time required to perform critical tasks. Two different maintenance specialists (ARES

and ASES) can execute non-critical MRW No. 7 and critical MRW No. 8 not sequentially, but in parallel.

If additional loaders are used, the critical path can be shortened even further after optimization:

1→2→3→17→4→5→6→8→9→10 (1.51 hours).

The results of computational analysis demonstrated that:

- optimization of collaborative workflows reduced maintenance duration by approximately 22% or 49% respectively, with and without the participation of the GO;

- task parallelization significantly improved operational efficiency;

- coordinated interaction among maintenance personnel reduced delays without compromising safety requirements.

Additional personnel resources, such as loaders, further reduced the duration of maintenance operations by enabling simultaneous execution of cargo handling tasks.

These results confirm the effectiveness of CDM models in managing complex maintenance processes in aviation systems.

Discussion. The results demonstrate that collaborative planning and coordination are critical factors in improving the efficiency of aircraft maintenance operations.

From an operational perspective, optimization of maintenance workflows provides several benefits:

- reduction of aircraft turnaround time;

- improvement of schedule reliability;

- more efficient utilization of maintenance personnel;

- enhanced operational safety.

The study also highlights the importance of integrating digital decision-support tools into maintenance management systems. Such tools can assist maintenance personnel in identifying critical tasks and coordinating activities in real time.

Despite the demonstrated benefits, the proposed model has several limitations. It assumes deterministic task durations and does not fully account for variability caused by environmental conditions, equipment availability, or human performance factors. Future research should incorporate stochastic modeling and simulation techniques to improve the accuracy and applicability of maintenance optimization models.

Conclusions. The study confirms that optimization of CDM significantly improves the efficiency of aircraft pre-flight maintenance operations.

Deterministic network models provide a practical framework for analyzing task dependencies and identifying opportunities for workflow optimization.

Implementation of collaborative planning, task parallelization, and structured coordination mechanisms can reduce maintenance duration, improve aircraft readiness, and enhance overall operational performance.

The proposed approach can be applied in aviation maintenance management systems, training programs [10], and decision-support technologies to improve coordination among aviation specialists.

Future research should focus on incorporating uncertainty factors, human performance variability, and real-time decision-support technologies to further improve maintenance planning and coordination.

Literature

1. Thomson, G. (2025). Why flying is still the safest way to travel. Retrieved from <https://hpbagpipe.com>
2. International Air Transport Association. (2025). IATA releases 2024 safety report. Retrieved from <https://www.iata.org>
3. National Transport Investigation Bureau of Ukraine. (2025). Analysis of the state of flight safety based on the results of the investigation of aviation events and incidents with civil aircraft of Ukraine and foreign-registered aircraft that occurred in 2024. Retrieved from <https://nbaai.gov.ua/wp-content/uploads/2025/03/2024.pdf> [In Ukrainian]
4. Howell, C. (2024). Human factors: Addressing human error, fatigue, and crew resource management in aviation safety. Retrieved from <https://aviationsafetyblog.asms-pro.com>
5. International Civil Aviation Organization. (2018). Manual on collaborative air traffic flow management (ATFM). Montreal, Canada: ICAO.
6. European Organization for the Safety of Air Navigation. (2017). Airport collaborative decision-making implementation manual. Brussels, Belgium: EUROCONTROL.
7. Manusov, V., Kalanakova, A., Ahyoev, J., Zicmane, I., Praveenkumar, M., & Safaraliev, M. (2023). Analysis of mathematical methods of integral expert evaluation for predictive diagnostics of technical systems. *Inventions*, 8(1), 28.
8. Atin, S., & Lubis, R. (2019). Implementation of critical path method in project planning and scheduling. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 662(2), 022031.
9. Shmelova, T., Sikirda, Y., & Syroizhka, I. (2025). Optimization of collaborative decision-making during the aircraft pre-flight maintenance. *Decision Making and Analysis (DMA)*, 3(1), 41–56. <https://doi.org/10.55976/dma.32025143441-56>
10. Shmelova, T., Sikirda, Y., Yatsko, M., & Kolotusha, V. (2023). Intelligent integrated training system for aviation specialists "Collaborative Decision-Making – Education". *CEUR Workshop Proceedings*, 3538, 168–180.

ЗАСТОСУВАННЯ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ЗАХИСТУ ОБ'ЄКТІВ КРИТИЧНОЇ ІНФРАСТРУКТУРИ ПРИФРОНТОВИХ МІСТ

Володимир Бахрушин

Національний університет «Запорізька політехніка»

APPLICATION OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION IN PROTECTION OF CRITICAL INFRASTRUCTURE OBJECTS OF FRONTLINE CITIES

Volodymyr Bakhrushyn

National University "Zaporizhzhia Polytechnic"

Abstract. Protecting critical infrastructure from air attacks is an important applied and scientific problem, the relevance of which has recently increased significantly due to massive attacks on critical infrastructure during Russia's full-scale aggression in Ukraine, the US and Israeli military operation in Iran, etc. In the past few decades, both general protection optimization problems and more specific problems related to specific tasks and objects have been investigated. However, recently, new approaches to organizing protection, new technologies and tools of protection have appeared, which makes the problem of developing new approaches to optimization and new solutions under new conditions relevant. A general conceptual model for optimizing the protection of critical infrastructure facilities in a frontline city has been constructed. It can be adapted to specific facilities and conditions, and can also be integrated into more general models that consider hybrid multi-level protection systems.

Атаки на критичну інфраструктуру міст з давніх часів використовувалися різними країнами як важливий інструмент досягнення перемоги. Останнім часом повномасштабне вторгнення росії в Україну, військова операція США та Ізраїлю проти Ірану, інші воєнні конфлікти не лише підвищили актуальність задачі комплексного захисту критичної інфраструктури, але й додали до цієї проблематики нові питання, що потребують дослідження та вирішення. Зокрема, це стосується значного розширення спектру та характеристик засобів нападу та захисту, серед яких є принципово нові, видів вразливостей об'єктів критичної інфраструктури, розмивання поняття «прифронтове місто» тощо. Через це кількість наукових і прикладних досліджень щодо захисту критичної інфраструктури у прифронтових та прикордонних містах у 2023 – 2026 роках істотно зростає порівняно із попереднім періодом. Зокрема, досліджуються комбіновані загрози, кібербезпека, стійкість об'єктів, інтеграція військових і цивільних заходів та ін. Міжнародні аналітичні центри Atlantic Council (2025), Bandura, R., & Romanishyn, A. (2025), RAND (2025) підкреслюють, що досвід України сьогодні формує глобальні стандарти захисту. Зокрема, це стосується акцентування уваги на проблемах стійкості через децентралізацію, дублювання систем, їх

різноманіття, швидке відновлення та публічно-приватне партнерство. Ці дослідження зазначають високу ефективність мобільних груп, інженерного захисту критичної інфраструктури та інтеграції цивільних і військових ресурсів у прифронтових містах. Piekarski (2025) розглядає критичну інфраструктуру України як одну з головних цілей гібридних і конвенційних атак з боку росії. Порівнюючи період 2014–2022 з повномасштабним вторгненням, він акцентує увагу на стратегічних атаках проти енергетики та логістики, які вже після публікації його роботи помітно посилилися. Bandura, R., & Romanishyn, A. (2025) як виклики зазначають брак кваліфікованого персоналу в зонах ризику, каскадні ефекти від пошкоджень, поєднання кінетичних ударів з кібератаками та використання дешевих дронів для виснаження оборони. Також вони містять рекомендації застосовувати робастну оптимізацію, сценарне планування, штучний інтелект для прогнозування загроз та міжнародну співпрацю з ЄС і НАТО (сьогодні варто додати співпрацю з арабськими країнами Близького Сходу).

Повномасштабна агресія росії в Україні та воєнна операція США та Ізраїлю проти Ірану продемонстрували неефективність традиційних дорогих ракет проти масованих атак порівняно дешевих дронів. Згідно з Baker, S. (2026), Christie, L. (2026), Karkadattil, A. (2026) це призвело до розвитку багат шарової оборони, в якій одним з головних складників є низьковартісні перехоплювачі зі штучним інтелектом, лазерні системи та інші, у тому числі гібридні рішення. Зокрема, Україна лідирує у створенні та застосуванні масових FPV-перехоплювачів вартістю \$1,000–\$3,000, які вже суттєво змінили економіку ППО/ПРО. Ізраїль та США розробляють перспективні лазерні, мікрохвильові та гібридні системи. Слід зазначити, що це може істотно вплинути на постановку і методологію розв'язування оптимізаційних задач. Оскільки змінюється парадигма захисту – від збиття індивідуальних цілей до перекриття певних областей повітряного простору, в яких за певних умов знищуються всі або переважна більшість засобів атаківання, які до них потрапляють. Втім, на сьогодні основним напрямом вважають гібридні підходи, що поєднують класичні та новітні технології захисту.

Через такі зміни рекомендації 2022 – 2024 р. сьогодні частково втратили актуальність і щонайменше потребують істотного коригування. Це підвищує актуальність дослідження не лише прикладних поточних проблем, але і більш загальних та фундаментальних аспектів захисту критичної інфраструктури. Однією з них є проблема оптимізації захисту, складниками якої є визначення змінних, критеріїв, обмежень, побудова й дослідження концептуальних і математичних моделей задачі оптимізації, вибір конкретних методів та інструментів її розв'язання. Може бути поставлено дві суттєво різні задачі – захист індивідуальних об'єктів критичної інфраструктури та захист системи таких об'єктів, розташованих у місті. У цій роботі досліджується концептуальний підхід до застосування методів комбінаторної оптимізації для розв'язання першої з цих задач.

Комбінаторна оптимізація є розділом теорії оптимізації, яка займається пошуком оптимального рішення зі скінченного набору можливих альтернатив. У комбінаторних задачах змінні є дискретними, зокрема для задачі, що розглядається, це будуть елементи множин допустимих значень змінних. Більшість задач комбінаторної оптимізації є NP-складними, при цьому розмірності задач постійно зростають. Тому часто шукають не точний оптимум, а «хороший» розв'язок. Втім, останнім часом, завдяки зростанню обчислювальної потужності комп'ютерів та інтеграції з машинним навчанням, її застосування для розв'язання прикладних задач значно розширилося. До головних прикладних напрямів сучасної комбінаторної оптимізації, згідно із Martello, S. (2026), Sciomachen, A. (2026), належать задачі управління операціями у різних сферах, логістики, планування виробництва, проблем розташування та розподілу, розподілу ресурсів, евакуації, медицини, організації гнучких виробництв, аукціонів тощо. Водночас розвивається теорія комбінаторної оптимізації, зокрема досліджуються більш складні та реалістичні моделі, створюються нові алгоритми розв'язання відповідних задач, аналізуються їх складність, чутливість та стійкість розв'язків тощо. Деякі загальні висновки останніх досліджень можуть бути перенесені на інші типи прикладних задач, а інколи й на задачі з інших сфер. Зокрема, у контексті захисту критичної інфраструктури це стосується доцільності диверсифікації та поєднання методів та підходів, обміну інформацією між складниками системи, врахування невизначеності, врахування критичності часу на прийняття і реалізацію рішень тощо.

У перших дослідженнях проблеми пошуку оптимальних рішень щодо захисту наземних об'єктів від повітряних атак розглядали відносно прості, але реалістичні на той час ситуації. Зокрема, Leibowitz, M. L., & Lieberman, G. J. (1960) шукали оптимальний розв'язок для задачі, коли точковій цілі загрожує атака ворожих літаків. При цьому припускали, що противник має у своєму розпорядженні спектр тактик атаки, кожна з яких визначається швидкістю, висотою, перетином бомбардувальників та масштабом. Оборона передбачає розгортання навколо цілі ракетних батарей декількох типів, кожний з яких характеризується вартістю та характерною здатністю протистояти заданій тактиці атаки. Метою був пошук оптимального поєднання ракетних батарей та їх розгортання для отримання найкращого захисту від усього спектру тактик атаки. Така постановка задачі була доволі спрощеною. Зокрема, вона не передбачала, що об'єкт може бути вражений повністю або частково з різним ступенем пошкодження, що прийнятно для точкового об'єкта, але не дуже реалістично для типового об'єкта критичної інфраструктури. Оптимальне рішення шукали з погляду захисту від конкретних атак, а не з погляду мінімізації втрат за проміжок часу. Не враховувалися можливість відновлення об'єкта та витрати на таке відновлення, невизначеності щодо імовірностей атак різного типу, можливість комбінованих атак та атак на засоби ПВО тощо. Водночас, модель була корисною для підвищення ефективності наявних систем ПВО

проти актуальних на той час загроз та давала змогу за розумний час отримувати розв'язок за допомогою тогочасної комп'ютерної техніки.

Пізніше розглядали багато різних задач, що поступово ускладнювалися і наближалися до тих чи інших практично важливих ситуацій. Значна увага приділялася задачам оптимального розміщення засобів захисту та оптимального розподілу цілей між ними при масових атаках. Зокрема, такі задачі розглядали Brown, G. et.al (2006), Karasakal, O. (2008), Kim, J.-K., & Seol, H. (2016), Kline, A., Ahner, D., & Hill, R. (2019) та інші дослідники. Для пошуку оптимальних рішень використовували як точні, так і наближені методи комбінаторної оптимізації, зокрема методи гілок та меж, цілочислового лінійного програмування з бінарними колонками, угорський, динамічне програмування, метаевристичні алгоритми та ін.

Більш сучасні підходи ілюструє стаття Özdemiş, Z., & İç, Y. T. (2023), де розглянуто проблему оптимального розгортання та позиціонування ракетних систем для захисту регіону від можливих загроз за допомогою багаторівневої системи протиповітряної оборони. Авторами запропоновано багатоцільову модель оптимізації для максимізації ймовірності знищення засобів атакування та мінімізації загальних інвестиційних втрат при застосуванні різних типів ракет ПВО/ПРО та запропоновано набір рішень для різних безпекових сценаріїв. Автори порівнюють алгоритми багатоцільової оптимізації рою частинок з алгоритмами покращеної доцільності (MOFEPFO) й цільового програмування (GP) та роблять висновок, що MOFEPFO з погляду чутливості результатів має переваги перед GP. Принаймні при використанні в останньому для пошуку розв'язку методу узагальненого зменшеного градієнта (GRG). Але варто зазначити, що задача захисту території має суттєві відмінності від задачі захисту об'єктів критичної інфраструктури. Крім того, ця публікація не враховує істотних змін концепту, зокрема того, що на сьогодні системи захисту об'єктів критичної інфраструктури є значно більш диверсифікованими. Як і у попередній роботі не враховуються ускладнення пов'язані із можливістю часткових пошкоджень різного ступеня, витратами на відновлення окремих об'єктів, доцільністю оптимізації не для одноразових атак, а для визначених проміжків часу, наявними невизначеностями. Також, не враховуються, цілком імовірні атаки на складники систем захисту об'єктів критичної інфраструктури. Деякі з цих обмежень не є критичними. Приміром, оптимізація систем захисту конкретних об'єктів може здійснюватися стосовно засобів враження, що пройшли попередні ешелони. Але і у цьому випадку постає додаткова проблема розподілу дефіцитних ресурсів між ешелонами.

У цій роботі зроблено спробу описати в межах класичних підходів більш реалістичні ситуації, наближені до актуальних проблем захисту критичної інфраструктури сьогодні. Важливою особливістю задачі захисту критичної інфраструктури є те, що принаймні частина змінних є

нечисловими, але може бути охарактеризована низкою числових параметрів. Наприклад, для кожного з типів засобів атаки на об'єкти критичної інфраструктури можуть бути визначені імовірності їх застосування протягом певного періоду часу, імовірності їх враження засобами захисту певного типу. Також може бути побудована дискретна функція розподілу імовірності втрат залежно від їх очікуваного розміру. Аналогічні характеристики можуть бути визначені для доступних засобів захисту. Необхідні статистичні дані можуть бути оцінені за даними про їх застосування у попередній період з коригуванням на те, що засоби атакування і засоби захисту постійно вдосконалюються та/або змінюються.

Концептуальну постановку задачі у порівняно повному вигляді можна сформулювати так. Об'єкт критичної інфраструктури (підстанція, водозабір, залізничне депо, важливий промисловий об'єкт, медичний заклад, орган державного управління тощо) у прифронтовому місті потребує захисту від комбінованих атак, які можуть здійснюватися балістичними/крилатими ракетами різних типів, ударними БПЛА різних типів, КАБами тощо. Система захисту інтегрується до загальноміської/регіональної системи ППО/ПРО/РЕБ, тому її ефективність залежить як від локальних засобів, так і від загального прикриття.

Засоби захисту належать до різних типів. Зокрема, можна виокремити:

- пасивні/інженерні засоби: укриття, маскування, фізичні бар'єри, розосередження обладнання;
- активні кінетичні засоби: різноманітні ЗРК/ЗРС малого/середнього радіусу, дрони-перехоплювачі (у тому числі рої дронів зі штучним інтелектом), гармати, ПЗРК;
- радіоелектронні засоби: системи РЕБ/РЕР (глушіння, спрямування, обман);
- лазерні/мікрохвильові комплекси;
- сенсорні/розвідувальні засоби: радары, оптоелектроніка, акустичні сенсори;
- інші засоби: мобільні групи, засоби інтеграції з міською/регіональною мережею тощо.

Кожен тип засобів захисту характеризується набором характеристик, серед яких найбільш важливими є: вартість придбання/розгортання у розрахунку на одиницю; вартість утримання/експлуатації/ремонткування у розрахунку на одиницю на рік; площа покриття; мобільність; наявна кількість; час перезарядки (готовності для повторного використання); вимоги до персоналу; імовірність втрати протягом року внаслідок знищення чи необхідності серйозного ремонту тощо. Крім того, для кожної пари «засіб атакування – засіб захисту» має бути надана оцінка ймовірності враження засобу атакування та/або його суттєвого відхилення від цілі, за якого він не зможе пошкодити об'єкт критичної інфраструктури чи інші важливі об'єкти.

Також мають бути враховані характеристики засобів атакуювання кожного типу, зокрема: дискретні розподіли імовірності спричинення втрат, що перевищують заданий розмір у разі одиничного використання засобу відповідного типу, а також у разі його застосування сукупно з іншими засобами, стохастичні моделі результатів застосування засобів кожного типу, у тому числі й у сполученні із застосуванням засобів атакуювання того самого чи інших типів;

У практично важливих ситуаціях є багато обмежень, які мають бути враховані. Зокрема це: кількість снарядів (ракет, дронів, ...), що можуть бути використані протягом певного часу з урахуванням перезарядки та обмеженого ресурсу; максимальні допустимі обсяги капітальних та щорічних поточних витрат; мінімальна захищена площа; мінімальна допустима ефективність системи захисту; сумісність її складників; ресурсні обмеження – персонал, розхідні матеріали, енергопостачання, логістика тощо.

При постановці задачі може бути використано низку критеріїв, які можуть застосовуватися окремо або спільно. Прикладами таких критеріїв є:

- максимізація імовірності того, що втрати за рік не перевищать заданого граничного рівня;
- мінімізація математичного сподівання сукупних очікуваних втрат;
- максимізація VaR/CVaR;
- максимізація загальної ймовірності виживання об'єкта протягом заданого періоду часу;
- мінімізація часу відновлення;
- максимізація покриття від конкретних типів загроз;
- баланс вартості/ефективності;
- максимізація стійкості за умов невизначеності.

Для реальних систем варто обирати багатоцільовий підхід з пріоритетами підхід з пріоритетами. Наприклад, лексикографічний, який передбачає забезпечення на першому етапі мінімального рівня захисту, з наступною оптимізацією за обраними критеріями.

Слід зазначити, що при переході до конкретних задач може бути необхідним уточнення окремих складників моделі та/або додавання додаткових умов. Приміром, уламки збитої ракети чи дрона самі по собі є загрозою для об'єктів критичної інфраструктури. Тому за необхідності може бути додана умова, щодо мінімізації ризику враження/пошкодження розташованих поруч об'єктів критичної або цивільної інфраструктури. За необхідності приймати «хороші» швидкі рішення в умовах реального часу, може бути необхідно спростити модель без втрати її адекватності.

Наступним етапом може бути адаптація загальної концептуальної моделі до конкретних задач, об'єктів, умов тощо. Також все більшої актуальності набуває побудова адекватних оптимізаційних моделей для

гібридних систем захисту, в яких класичні моделі можуть розглядатися як одна із підсистем.

При підготовці тез використовувався інструмент штучного інтелекту Grok 4.3 від xAI станом на травень 2026 (пошук літературних джерел за заданою проблематикою та оформлення посилань, пропозиції щодо уточнення запропонованої автором концептуальної моделі, які частково були враховані).

Література

1. Atlantic Council. (2025). Ukraine's wartime experience provides blueprint for infrastructure protection. <https://www.atlanticcouncil.org/blogs/ukrainealert/ukraines-wartime-experience-provides-blueprint-for-infrastructure-protection>.

2. Baker, S. (2026). Interceptor drone in Iran-Ukraine war: How to build a constant balancing act. *Business Insider*. <https://www.businessinsider.com/interceptor-drone-iran-ukraine-war-how-build-constant-balancing-act-2026-4>.

3. Bandura, R., & Romanishyn, A. (2025). Striving for Access, Security, and Sustainability: Ukraine's Transition to a Modern and Decentralized Energy System. CSIS. https://csis-website-prod.s3.amazonaws.com/s3fs-public/2025-07/250702_Bandura_Striving_Access.pdf

4. Brown, G., Carlyle, M., Diehl, D., Kline, J., & Wood, K. (2006). A two-sided optimization for theater ballistic missile defense. *Operations Research*, 54(5), 865–887. <https://doi.org/10.1287/opre.1050.0231>

5. Christie, L. (2026). Shaping modern warfare: The strategic role of high-power microwave directed energy weapons in multi-domain operations. *Defence Science Journal*, 76(2), 299-309.

https://www.researchgate.net/publication/401596360_Shaping_Modern_Warfare_The_Strategic_Role_of_High-Power_Microwave_Directed_Energy_Weapons_in_Multi-Domain_Operations.

6. Hvizda, M., et al. (2025). The Implications of the Fighting in Ukraine for Future U.S.-Allied Defense Industrial Bases and Combat Operations. RAND Corporation.

https://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/research_reports/RRA3100/RRA3141-2/RAND_RRA3141-2.pdf.

Karkadakattil, A. (2026). Laser-based directed energy weapons: Technological capabilities, material interaction, and strategic deployment pathways. *Defence Science Review*. <https://doi.org/10.37055/pno/216776>

7. Karasakal, O. (2008). Air defense missile-target allocation models for a naval task group. *Computers & Operations Research*, 35(6), 1759–1770. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2006.09.010>

8. Kim, J.-K., & Seol, H. (2016). The optimal deployment problem of air defense artillery for missile defense. *Journal of the Korean Society of Industrial and Systems Engineering*, 39(1), 98–104. <https://doi.org/10.11627/jkise.2016.39.1.098>

9. Kline, A., Ahner, D., & Hill, R. (2019). The weapon-target assignment problem. *Computers & Operations Research*, 105, 226–236. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.10.015>
10. Leibowitz, M. L., & Lieberman, G. J. (1960). Optimal composition and deployment of a heterogeneous local air-defense system. *Operations Research*, 8(3), 324–337. <https://doi.org/10.1287/opre.8.3.324>
11. Martello, S. (2026). Recent advances in combinatorial optimization. *Journal of Combinatorial Optimization*, 51(4). <https://doi.org/10.1007/s10878-026-01420-9>
12. Özdemir, Z., & İç, Y. T. (2023). Multi-objective deployment model for regional air defense. *Soft Computing*, 27(11), 7321–7335. <https://doi.org/10.1007/s00500-023-07965-9>
13. Piekarski, M. (2025). Critical infrastructure as a target of hybrid and conventional attacks: Lessons from the Ukrainian experience. Special issue on terrorism. ABW. https://www.abw.gov.pl/ftp/foto/Wydawnictwo/terroryzm/wydanie-specjalne-2025/10_-_articles_-_M_Piekarski.pdf
14. Sciomachen, A. (2026). Preface to the special issue on “Combinatorial optimization and applications”. *Mathematics*, 14(4), 665. <https://doi.org/10.3390/math14040665>

МЕТОД ЦИФРОВОГО ФЕНОТИПУВАННЯ РОСЛИННИХ ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ ЗОБРАЖЕНЬ

Станіслав Ведмедєв, Еліна Терещенко
Національний університет «Запорізька політехніка»

DIGITAL IMAGE-BASED PLANT PHENOTYPING METHOD

Stanislav Vedmedev, Elina Tereschenko
National University "Zaporizhzhia Polytechnic"

Abstract. This study aims to develop a method to optimize photography settings and color mode selection. The resulting data enables the creation of an algorithm for constructing high-fidelity digital models of plant phenotypes.

Дослідження присвячене розробці та впровадженню методу фенотипування насіння соняшника. Насіння як об'єкт фенотипування демонструє унікальні характеристики з точки зору форми, розміру, кольору та візерунків поверхні. Поширені кольори включають чорний або темно-сірий з темними смугами або без них, але є також більш чіткі фенотипи, такі як повністю біле насіння або насіння з контрастними білими, чорними або сірими смугами [1]. Деякому насінню бракує чіткого шару перикарпію, і натомість воно має коричневі або жовтуваті смуги безпосередньо на насіннєвій оболонці. При застосуванні до інших культур

питання стає ще складнішим, оскільки різноманітність забарвлення та морфології насіння часто більша [2]. Для досягнення надійних наукових результатів експериментальні умови повинні забезпечувати високу роздільну здатність та відтворюваність вимірюваних ознак об'єкта фенотипування. Розробка математично обґрунтованого методу цифрового фенотипування рослинних об'єктів на основі зображень дозволить забезпечити необхідну точність та відтворюваність результатів, що є принципово важливим для прийняття рішень у селекції. Експерименти проводилися на генетичному матеріалі Інституту олійних культур НААН України. Для наповнення баз даних фенотипових ознак стандартизованими цифровими даними було створено колекцію зображень об'єктів фенотипування. Зображення були отримані за допомогою стаціонарного фенотипувального пристрою, розробленого в Інституті олійних культур НААН України [3]. Пристрій дозволяє фотографувати об'єкт и розміром до 3 см без необхідності переналаштування. Блок фенотипування модернізований кольоровими світлодіодними лампами та ізолюючою трубою для усунення зовнішніх перешкод освітлення. Колір освітлення можна регулювати за допомогою пульта дистанційного керування. Під час аналізу насіння зі суттєво різними кольоровими властивостями виникла необхідність оптимізувати параметри візуалізації, зокрема колір фону та освітлення. Для кожного нового типу насіння необхідно вибрати найбільш підходящу конфігурацію умов фотофіксації, щоб на наступному етапі забезпечити точний фенотиповий аналіз.

Введемо математичне формулювання задачі цифрового фенотипування рослинних об'єктів як оптимізаційну задачу вибору параметрів фотофіксації об'єкту фенотипування, що дає найменшу похибку вимірювання морфологічних ознак.

Нехай задано тривимірний простір пошуку X , який є декартовим добуток множин параметрів фотофіксації:

$$X = L \times F \times C,$$

де $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ — множина значень інтенсивності освітлення (наприклад, у люксах або рівнях потужності освітлювача);

$F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ — дискретна множина варіантів колірної фону;

$C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ — множина колірних режимів (монохромні або спектральні канали).

Потужність множини $|X| = n \times m \times k$. Отже, множина $X = \{(l_j, f_j, c_j)\}, j = \overline{1, |X|}$.

Визначимо цільову функцію $E(l, f, c)$ як функцію похибки оцінки морфологічної ознаки R :

$$E(l, f, c) = \frac{|R - R_{ref}|}{R_{ref}} \rightarrow \min, \quad (1)$$

де:

R — значення морфологічної ознаки, обчислене за цифровим зображенням, отриманим при параметрах $(l, f, c) \in X$;

R_{ref} — еталонне значення характеристики, виміряне контактним методом.

Необхідно знайти такий вектор оптимальних параметрів $x^* = (l^*, f^*, c^*)$, що мінімізує значення функції похибки на множині X :

$$x^* = \operatorname{argmin} E(l, f, c) \text{ при } (l, f, c) \in X, \quad (2).$$

За умови обмеження на гранично допустиму похибку δ :

$$E(l^*, f^*, c^*) \leq \delta. \quad (3)$$

Підбір оптимального набору параметрів фотографування має здійснюватися відповідно до морфологічних ознак об'єкта фенотипування. Набір параметрів (l^*, f^*, c^*) фотофіксації об'єктів дослідження, який дозволяє досягти найменшої похибки вимірювання, тобто мінімум функції $E(l, f, c)$ (1), на всіх можливих наборах значень параметрів, будемо називати *оптимальним*.

Метод цифрового фенотипування рослинних об'єктів на основі зображень (МЦФЗ) дозволяє визначити оптимальний набір параметрів фотофіксації $x^* = (l^*, f^*, c^*)$ (2).

МЦФЗ складається з таких етапів.

1. Формування еталонної морфологічної моделі Ω та критеріїв оцінки. На цьому етапі визначаються еталонна морфологічна модель Ω з ключовими морфологічними ознаками насінини (геометрія, колір, текстура), які мають бути ідентифіковані. Відбирається множина насінин S , $|S| = N$, що відповідають еталонній морфологічній моделі Ω .

2. Генерація сценаріїв модельного дослідження. Здійснюється серія ітераційних запусків фотофіксації довільних a насінин з множини S при всіх наборах параметрів фотофіксації $(l, f, c) \in X$, де l є рівень інтенсивності світла. Фон f : вибір підкладки з різною відбивною здатністю та колірним спектром. Колірний режим c : перемикання між монохромним або спектральними каналами. Вибір параметра a визначається дослідником з огляду на морфологічні ознаки насінини, природна різноманітність насіння, для якого підбираються умови фотофіксації, трудомісткість операцій. Результатом є сформована множина зображень $P = \{p_{t,j}, t = \overline{1, a}; j = \overline{1, |X|}\}$.

3. Формування підмножини X' . На цьому етапі проводиться обробка зображень $p_{t,j} \in P, t = \overline{1, a}; j = \overline{1, |X|}$ з метою формування підмножини $X' \subset X$, яка включає такі набори параметрів фотофіксації (l_j, f_j, c_j) , що дозволяють визначити контури насінини на загальному фоні. Характеристична функція множини X'

$$\chi_{X'}(l_j, f_j, c_j) = \begin{cases} 1, \text{ якщо контури визначено на зображеннях } p_{t,j} \forall t = \overline{1, a} \\ 0, \text{ в протилежному випадку} \end{cases}.$$

Отже, множина наборів параметрів фотофіксації, що дозволяють визначити контури насінини на загальному фоні, є множина $X' = \{(l_i, f_i, c_i)\}, i = \overline{1, |X'|}$.

Набори параметрів фотофіксації $X \setminus X'$, які не дозволяють розпізнати насінину на зображенні, далі не застосовуються.

4. Формування вибіркової сукупності для статистичного експерименту.

Визначається гранично допустима похибка δ для оцінки морфологічної ознаки R . Здійснюється серія ітераційних запусків фотофіксації для насінин множини S при всіх наборах параметрів фотофіксації $(l_i, f_i, c_i) \in X', i = \overline{1, |X'|}$. Формується множина зображень $P' = \{p'_{g,i}\}, g = \overline{1, N}; i = \overline{1, |X'|}$, де g – номер насінини множини S , $g = \overline{1, N}$; i – номер набору параметрів фотофіксації $(l_i, f_i, c_i) \in X', i = \overline{1, |X'|}$. Для кожного зображення $p'_{g,i} \in P', g = \overline{1, N}; i = \overline{1, |X'|}$ визначається морфологічна ознака насінини $R_{g,i}$. Далі визначається похибка оцінки морфологічної ознаки $R_{g,i}$

$$E_g(l_i, f_i, c_i) = E_{g,i} = \frac{|R_{g,i} - R_{ref}|}{R_{ref}}.$$

Знаходиться середня арифметична похибки оцінки морфологічної ознаки при наборі параметрів фотофіксації $(l_i, f_i, c_i) \in X'$ для N зображень $E(l_i, f_i, c_i) = E_i = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^N E_{g,i}$.

Перевіряється виконання умови для наперед визначеній гранично допустимій похибки δ

$$E_i \leq \delta. \quad (4)$$

При не виконанні умови (4) набір параметрів фотофіксації (l_i, f_i, c_i) вилучається з множини X' , тобто $X' = X' \setminus (l_i, f_i, c_i)$.

По завершенню етапу 4 сформовано множину X' наборів параметрів фотофіксації, що забезпечують гранично допустиму похибку ε при визначенні морфологічної ознаки R .

5. Присвоєння статусу «оптимальний» набору параметрів фотофіксації. Зі всіх наборів параметрів фотофіксації $(l_i, f_i, c_i) \in X', i = \overline{1, |X'|}$, який отримано на попередньому етапі, обираються два такі, що дали найменші похибки E_i у визначенні ознаки R та не перевищили ε .

Далі визначається статистична значимість знайдених переваг певних наборів параметрів. За результатами обирається набір параметрів, який назвемо «оптимальний», якщо статистично значимою є перевага цього набору. У разі відсутності переваги обидва режими отримують статус «оптимальний».

6. Формалізація цифрового представлення та формування рекомендацій по режиму фотофіксації для насіння такого типу. Кінцевий етап, на якому фізичний об'єкт отримує опис у вигляді структурованого набору числових даних з фіксацією оптимальних параметрів фотофіксації.

Для визначення фенотипових характеристик проведено математичні розрахунки та числовий аналіз за зображеннями насінин за допомогою спеціального програмного забезпечення [4].

Література

1. Vedmedeva, K., & Machova, T. (2022). Study of the possibilities of using sunflower lines with different colours of seeds to create poultry feed. *Helia*, 45(76), 23–40.
2. Manianga, A., Bose, C., & Sreeraj, S. (2024). Sustainable applications of phytochemicals and nutritive components derived from selected underutilized seeds: A review. *Acta Scientiarum Polonorum Technologia Alimentaria*, 23(1), 87–122.
3. Aliyev, E. B., & Vedmedyeva, K. V. (2024). *Kil'kisne fenotypuvannya henotypiv sonyashnyku: Monohrafiya* [Quantitative phenotyping of sunflower genotypes: Monograph]. LIRA.
4. Vedmedyev, S. (2024). *Rozrobka prohramnoho zabezpechennya dlya zbyrannya fenotypichnykh danykh nasynnya sonyashnyku* [Development of software for collecting phenotypic data of sunflower seeds]. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 1, 3–10.

МЕТОД ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ ПРОГРАМНИХ КОМПЛЕКСІВ ПІДТРИМКИ ОПЕРАТИВНОГО ПЕРСОНАЛУ АЕС

Борис Вінтенко^{1,2}, Олексій Смірнов³, Ірина Миронець¹,
Тетяна Смірнова³,

¹Черкаський державний технологічний університет, Черкаси,
Україна

²ПАТ “Науково-виробниче підприємство “Радій”, м. Кропивницький,
Україна

³Центральноукраїнський національний технічний університет, м.
Кропивницький, Україна

METHOD OF FUNCTIONAL STABILITY OF SOFTWARE COMPLEXES SUPPORTING NPP OPERATIONAL PERSONNEL

Borys Vintenko^{1,2}, Oleksii Smirnov³, Iryna Myronets¹, Tetiana Smirnova³,
¹Cherkasy State Technological University, Cherkasy, Ukraine

²PJSC “Scientific and Production Enterprise “Radius”, Kropyvnytskyi,
Ukraine

³Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi,
Ukraine

Abstract. Modern nuclear power plants are complex facilities with multi-level energy conversion and digital control processes. The transition from traditional paper regulations to computer-oriented procedures has allowed the creation of intelligent operator support systems that significantly reduce cognitive load and increase the reliability of power unit control. A key requirement for such critical systems is their fault tolerance. However, in the

event of technical failures, it is not enough for the operator to simply state the fact of failure – it is necessary to understand the degree of degradation of the system functions. This necessitates the need to assess the functional stability of the operator support system through quantitative indicators. The proposed approach differs from classical diagnostic methods in that it not only fixes the malfunction, but also forms a numerical assessment of the system's ability to continue performing tasks on an appropriate scale. This technique is universal for diagnosing critical application systems that use redundant and diversified data sources

Постановка проблеми. Атомні електростанції сьогодні представляють собою високотехнологічні комплекси, де управління складними енергетичними процесами базується на розгалужених цифрових архітектурах. Керування енергоблоком із блочного щита спирається на сувору регламентацію дій, що все частіше реалізується через комп'ютерно-орієнтовані процедури. Такі цифрові рішення є основою для систем підтримки оператора, які в реальному часі аналізують потоки даних, автоматизують ідентифікацію експлуатаційних умов та мінімізують вплив людського фактора. Оскільки системи підтримки оператора належать до систем критичного застосування, їхня відмовостійкість є пріоритетною вимогою. Хоча традиційні методи – резервування, самодіагностика та багатоверсійне програмне забезпечення – дозволяють ефективно виявляти збої, вони не дають повної картини стану системи після виникнення дефекту. Для забезпечення безпечної експлуатації оператору необхідно володіти інформацією про рівень деградації функцій та залишкову працездатність комплексу. Це визначає актуальність розробки методів оцінки функціональної стійкості, які дозволяють отримати точну кількісну оцінку здатності системи виконувати цільові завдання в умовах часткових відмов або пошкоджень.

Метою роботи є розробка методу чисельної оцінки функціональної стійкості елементів інформаційної системи підтримки оперативного персоналу АЕС.

Модель комп'ютерно-орієнтованих процедур системи підтримки оперативного персоналу на основі продукційних правил. Основою для розробки систем підтримки оператора у цьому дослідженні стали технологічні регламенти, що визначають послідовність дій персоналу залежно від вхідних умов та результатів попередніх операцій. Структурно ці регламенти складаються з двох типів елементів: правил (Rules) та дій (Actions), що в межах інтелектуальних систем інтерпретуються як продукційна модель на основі дерев рішень. У роботі запропоновано графову модель комп'ютерно-орієнтованої процедури, де вершинами є правила та дії, а ребрами – логічні переходи між ними. Формальний опис такої процедури представлений відповідною математичною функцією. Активація конкретних гілок дій, а також верифікація їх виконання оператором, здійснюється шляхом спрацювання логічних правил.

Механізм прийняття рішень у системі базується на аналізі технологічних параметрів у реальному часі з урахуванням вагових коефіцієнтів. Значення кожного параметра формується на основі сукупності сигналів, отриманих від суміжних систем енергоблока. Наприклад, стан "відключення насоса" розглядається як технологічний параметр, що обчислюється на базі вхідних дискретних сигналів. Таким чином, саме достовірність сигналів від зовнішніх систем є визначальним фактором для ідентифікації поточного стану всієї процедури керування

Метод визначення функціональної стійкості комп'ютерно-орієнтованих процедур. У даному дослідженні розглядається життєздатність системи підтримки оператора в умовах неповноти або недостовірності вхідної інформації. Для забезпечення цієї властивості впроваджено механізми надмірності різнорідних джерел даних та алгоритми адаптивного заміщення втрачених сигналів. Ключовим критерієм активації таких алгоритмів обрано показник функціональної стійкості. Під функціональною стійкістю системи підтримки оператора розуміється її здатність безперервно забезпечувати персонал актуальними кроками процедур керування в автоматичному режимі, попри відмови каналів зв'язку або технічне обслуговування обладнання. Структуру комп'ютерно-орієнтованих процедур подано у вигляді ієрархічного графа, де: Вершини – це мажоритовані резервовані набори сигналів, технологічні параметри та логічні правила; Ребра – напрямки передачі даних, що мають відповідні вагові коефіцієнти. Дестабілізуючим чинником для системи є відсутність або недостовірність сигналів, що з позиції теорії графів призводить до розриву ребер та зниження вершинної зв'язності. Оскільки зв'язки між елементами мають різну значущість (вагу), класична вершинна зв'язність не є достатньо інформативною для оцінки функціональної стійкості. Замість неї запропоновано використовувати критерій ймовірнісної зв'язності розподіленої системи. У контексті дослідження цей показник характеризує ймовірність достовірного визначення стану кожного елемента процедури, що дозволяє кількісно оцінити надійність ідентифікації стану енергоблока на кожному рівні ієрархії

Функціональна стійкість наборів сигналів. Для формування вхідних даних у комп'ютерно-орієнтованих процедурах застосовується групування сигналів у резервовані набори, що надходять від суміжних програмно-технічних комплексів енергоблока. Процес обчислення технологічних параметрів передбачає логічну обробку цих даних методами голосування, усереднення або медіанної фільтрації.

В основі дослідження лежить модель резервування «М з N», де достовірність параметра підтверджується за умови узгодженості щонайменше М сигналів із загальної кількості N. Кожен інформаційний канал характеризується власною ймовірністю безвідмовної роботи (наявності сигналу). Для кількісного моніторингу стану системи запропоновано ієрархію рівнів функціональної стійкості : Максимальний (100%): сумарна ймовірність безвідмовності всіх компонентів, що

відповідає стану повної структурної надмірності; Критичний: порогове значення, що визначається як сума мінімальних ймовірностей для гранично необхідної кількості сигналів. Перетин цього порога означає, що будь-яка наступна відмова унеможливило верифікацію параметра; Поточний: фактичне значення ймовірності, розраховане на основі справних у даний момент каналів даних; Запас стійкості: різниця між поточним показником функціональної стійкості та його критичною межею. Використання коефіцієнта пропорційності дозволяє конвертувати абсолютні показники у відсоткову шкалу, що забезпечує оперативність і наочність оцінки стійкості технологічних параметрів у складі цифрових процедур.

Функціональна стійкість правил комп'ютерно-орієнтованих процедур. Ідентифікація стану логічних правил у комп'ютерно-орієнтованих процедурах базується на аналізі технологічних параметрів з урахуванням їхніх інформаційних вагових внесків. Ключовою умовою достовірності результату є не лише узгодженість даних, а й достатня сумарна "вага" вхідних наборів. Для обчислення функціональної стійкості кожного правила використовуються попередньо визначені показники стійкості відповідних технологічних параметрів. У дослідженні виокремлено два підходи до оцінювання: Середня оцінка (ліберальна): Максимальний рівень функціональної стійкості правила (100%) визначається як середньозважене значення показників стійкості всіх релевантних параметрів. Поточний та критичний рівні розраховуються аналогічно – як середні значення відповідних рівнів параметрів з урахуванням їхньої ваги. Консервативна оцінка (сувора): За 100% стійкості приймається максимальне значення серед зважених показників параметрів. Поточний та критичний рівні в цьому випадку визначаються за мінімальними значеннями серед відповідних рівнів стійкості параметрів, що забезпечує врахування найбільш "слабкої ланки". На основі цих підходів формуються чотири ключові метрики: критична/поточна середня та критична/поточна консервативна стійкість. Запас функціональної стійкості обчислюється як різниця між поточним і критичним показниками. Для уніфікації аналізу всі отримані абсолютні величини трансформуються у відсоткову шкалу за допомогою коефіцієнта пропорційності

Функціональна стійкість комп'ютерно-орієнтованих процедур та систем підтримки оперативного персоналу. Розрахунок показників стійкості для окремих логічних правил дозволяє послідовно оцінити функціональну стійкість усієї комп'ютерно-орієнтованої процедури, а згодом – і всієї системи підтримки оператора в цілому. Оскільки системи підтримки персоналу АЕС належать до категорії критично важливих, у межах даного дослідження для підсумкового оцінювання функціональної стійкості процедур та системи загалом обрано консервативний підхід. Згідно з цим принципом, рівень функціональної стійкості системи визначається за мінімальним (найнижчим) поточним значенням серед усіх її складових правил. Такий метод гарантує врахування найбільш критичної

ланки та забезпечує максимальну об'єктивність аналізу надійності в умовах потенційних збоїв.

Реалізація оцінки функціональної стійкості комп'ютерно-орієнтованих процедур та моделювання відмов. Функціональне ядро розробленого прототипу системи становить програма OrSupport, яка забезпечує безпосередню інформаційну підтримку оператора. Вона інтегрує та обробляє такі потоки даних: Вхідні сигнали, що надходять у реальному часі від програмно-технічних комплексів енергоблока через мережеві протоколи; Базу технологічних параметрів, де для кожної одиниці визначено відповідні кластери сигналів та розрахункові скрипти; Базу логічних правил та дій, що регламентують роботу персоналу. У процесі функціонування OrSupport здійснює безперервний моніторинг показників функціональної стійкості для кожного елемента ієрархії (параметри – правила – дії). Розрахунок базується на ймовірнісних характеристиках надійності сигналів та логіці мажоритування за схемою «М з N». Програма автоматично обчислює три рівні стійкості у відсотковому еквіваленті: Максимальний: стан повної працездатності всіх каналів; Критичний: сума ймовірностей роботи М найменш надійних сигналів (мінімальний поріг, за якого ще можливе достовірне визначення параметра); Поточний: сумарна ймовірність безвідмовності фактично активних у даний момент N сигналів. Така архітектура дозволяє системі не лише фіксувати поточний стан, а й оцінювати реальний рівень деградації функцій підтримки оператора. Для верифікації розроблених алгоритмів було змодельовано базу знань системи підтримки оператора, структура якої відповідає реальній інструкції з ліквідації порушень на АЕС. Модель охоплює 50 процедур, кожна з яких містить до 10 правил активації, 3 правила завершення, а також ієрархію з 10 кроків та відповідної кількості підкроків. Вхідний масив сформовано з 1000 сигналів із ймовірністю безвідмовної роботи в діапазоні [0.95;1.0]. Методика експерименту передбачала імітацію відмови 20 випадкових сигналів з десятикратним повторенням досліду для стабілізації результатів. Отримані дані продемонстрували наступні показники для технологічних параметрів: Середній критичний рівень функціональної стійкості: 66.23%; Середній поточний рівень функціональної стійкості: 97.96%; Середній запас функціональної стійкості: 31.03%. При оцінюванні стійкості правил та процедур порівнювалися два підходи: Середня оцінка: розраховується як середнє арифметичне показників дочірніх елементів. Вона є більш «чутливою» до локальних змін і точніше відображає загальну динаміку деградації системи. Консервативна оцінка: базується на принципі «найслабшої ланки» (мінімальне значення серед усіх елементів). Цей підхід є пріоритетним для систем критичного застосування, де відмова одного компонента може нівелювати працездатність усієї структури. Порівняльний аналіз результатів моделювання наведено таким чином: Критичний рівень функціональної стійкості системи: Консервативна оцінка – 65.78%, Середня оцінка – 75.6%; Поточний рівень

функціональної стійкості системи: Консервативна оцінка – 74.35%, Середня оцінка – 98.8%; Запас функціональної стійкості: Консервативна оцінка – 8.57%, Середня оцінка – 23.2%. Результати підтверджують, що консервативний підхід дає більш жорстку оцінку стану системи, виявляючи критичне зниження запасу стійкості (до 8.57%), що є вирішальним для забезпечення ядерної безпеки.

Висновки. У межах дослідження розроблено та апробовано підхід до оцінювання відмовостійкості цифрових алгоритмів на основі показника функціональної стійкості. Сформовано математичну модель для розрахунку граничних (максимального і критичного) та фактичного рівнів працездатності системи. Експериментальна перевірка на базі сценаріїв ліквідації аварійних ситуацій АЕС підтвердила ефективність запропонованої методики. Результати моделювання продемонстрували, що в умовах відмов вхідних даних консервативна оцінка дає найбільш точний прогноз щодо деградації системи. Перспективи подальшої роботи полягають у створенні механізмів адаптації системи підтримки оператора, де головним критерієм успішності стане збільшення запасів функціональної стійкості.

МОДИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ М.В. МИХАЛЕВИЧА ДЛЯ МІЖГАЛУЗЕВИХ СТРУКТУРНО-ТЕХНОЛОГІЧНИХ ЗМІН

Олена Воловик

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

ADVANCING M. MYKHALEVYCH'S MODEL FOR INTERSECTORAL STRUCTURAL-TECHNOLOGICAL TRANSFORMATION

Olena Volovyk

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine

Abstract. Modern economies undergo continuous transformations shaped by global competition, technological innovation, and resource constraints. A central challenge is the reduction of production costs, which directly influences the competitiveness of enterprises and entire industries. This study explores economic-mathematical models for planning structural and technological changes within the inter-industry balance. These models are grounded in the classical Leontief framework and extended through optimization formulations incorporating the multiplier “income growth – output growth.” Two problem formulations are considered: the traditional approach with linear, linear fractional and non-smooth constraints, and an alternative formulation introducing an auxiliary variable to ensure computational stability and correctness. The evolution of software implementations is traced from early MULSTR/MULSTR1 systems written in RATFOR, through integrated environments such as IOMSTC and MiSTC, to contemporary applications

employing the AMPL modeling language with solvers SNOPT and BARON on the NEOS server. These modern tools enable efficient resolution of complex nonlinear problems of structural and technological transformations using economic data.

Сучасна економіка характеризується постійними трансформаціями, зумовленими глобальною конкуренцією, технологічними змінами та обмеженістю ресурсів. Одним із ключових викликів сьогодення є необхідність зниження витрат виробництва, що безпосередньо визначає конкурентоспроможність як окремих підприємств, так і цілих галузей. Існують два стратегічні напрями вирішення цієї проблеми: 1) модернізація та заміна технологій шляхом впровадження інноваційних процесів, що дозволяють скоротити витрати на сировину, матеріали та виробничі ресурси; 2) відмова від застарілих енерго- та ресурсомістких технологій, що сприятиме оптимізації структури виробництва та зменшенню залежності від неефективних процесів.

Для аналізу ефективності цих змін широко застосовується апарат економіко-математичного моделювання. Зокрема, таблиці Леонтєва «витрати–випуск» є потужним інструментом дослідження міжгалузевих зв'язків. Вони дозволяють оцінити, як зміни в одній галузі впливають на інші, прогнозувати наслідки структурних реформ і вивчати міжгалузеві зв'язки за допомогою апарату лінійної алгебри. Міжгалузевий баланс виступає як модель, що відображає виробничі взаємозв'язки між галузями економіки країни чи регіону.

У класичній моделі Леонтєва центральним елементом є матриця прямих витрат, яка відображає технологічні коефіцієнти виробництва. Вона показує, скільки ресурсів потрібно кожній галузі для виробництва одиниці продукції і дозволяє аналізувати поточний стан економіки та моделювати сценарії майбутніх структурних змін.

Пряма модель Леонтєва «витрати–випуск» базується на припущенні, що економіка країни складається з n агрегованих галузей. Взаємозв'язок між кінцевим та валовим продуктом (або навпаки) можна подати у матричній формі як:

$$y = (I - A)x \quad \text{або} \quad x = (I - A)^{-1}y, \quad (1)$$

де x - вектор валового випуску галузей; y - вектор кінцевого продукту; I - одинична $n \times n$ матриця; A - матриця коефіцієнтів прямих витрат для n галузей, де a_{ij} показує скільки продукції галузі i необхідно для виробництва одиниці продукції галузі j . Ця модель дозволяє кількісно описати міжгалузеві виробничі взаємозв'язки та є основою для аналізу ефективності структурних змін в економіці.

На основі моделі міжгалузевого балансу науковці Інституту кібернетики НАН України, зокрема Михалевич М.В., Сергієнко І. В., Стецюк П.І. та інші, розробили клас оптимізаційних моделей міжгалузевого планування структурно -технологічних перетворень у

перехідній економіці [1–5]. Ці моделі спрямовані на вирішення ключових макроекономічних завдань, серед яких: мінімізація витрат виробництва та підвищення ресурсоефективності, визначення змін у структурі експорту та імпорту з метою зниження загального рівня енергоспоживання, аналіз і прогнозування структурних перетворень на рівні національної або регіональної економіки тощо.

Розглянемо одну з таких моделей — задачу планування структурно-технологічних змін. Будемо вважати, що економіка складається з n чистих галузей, кожна з яких виробляє лише один вид продукції, де i, j — номери цих галузей ($i, j = 1, \dots, n$). Як і в моделі Леонтєва, A — матриця коефіцієнтів прямих витрат для n галузей, де a_{ij} показує обсяг продукції галузі i , необхідний для виробництва одиниці продукції галузі j . Нехай q_i — частка оплати праці та інших виплат за працю у ціні продукції i -тої галузі. Припустимо лінійну залежність між оплатою праці та іншими виплатами за працю q_i та обсягом виробництва в галузях. Також вважатимемо, що основне джерело доходів для споживачів – заробітна плата. Тоді сукупні доходи D кінцевих споживачів пропорційні обсягу виробництва та обчислюються як:

$$D = \sum_{i=1}^n q_i x_i . \quad (2)$$

Будемо виходити з припущення, що кінцевий продукт галузей має двокомпоненту структуру: одна частина залежить від D , а інша залишається незалежною від нього. Тоді кінцевий продукт можна формалізувати у матричній формі рівнянням:

$$y = \alpha D + h, \quad (3)$$

де $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ - визначається експортно-імпортним сальдо галузей та потребами суспільного споживання; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ - коефіцієнти, які відображають структуру індивідуального споживання та внутрішніх інвестицій; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ - кінцевий продукт у продуктивній моделі Леонтєва.

Виражаючи D через матрицю A та вектор q шляхом відповідних підстановок та перетворень з урахуванням співвідношень (1), (2) та (3), отримуємо наступне співвідношення:

$$D(A, q) = \frac{q^T(I-A)^{-1}h}{1-q^T(I-A)^{-1}\alpha} \quad (4)$$

Величину $q^T(I-A)^{-1}\alpha$ у знаменнику слід розглядати, як мультиплікатор, який М. Михалевич назвав мультиплікатором «приріст доходів – приріст виробництва», що показує наскільки зміна обсягів виробництва в економіці трансформується у зміну кінцевих доходів населення, тобто відображає чутливість доходів споживачів до змін у виробничій структурі. Позначемо його, як функцію від A та q :

$$k(A, q) = q^T(I-A)^{-1}\alpha. \quad (5)$$

Тоді оптимізаційна задача може бути сформульована наступним чином: знайти такі зміни ΔA і Δq існуючих значень елементів матриці A та вектора q , які б максимізували цільові функції

$$D(A + \Delta A, q + \Delta q) = \frac{(q + \Delta q)^T (I - A - \Delta A)^{-1} h}{1 - (q + \Delta q)^T (I - A - \Delta A)^{-1} \alpha} \quad (6)$$

або

$$k(A + \Delta A, q + \Delta q) = (q + \Delta q)^T (I - A - \Delta A)^{-1} \alpha \quad (7)$$

з урахуванням відповідних обмежень та умов. Оскільки функція (6) не є неперервною для всіх значень $\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}$ та $\Delta q = \{\Delta q_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$, для усунення точок розриву в (6) необхідним є виконання таких умов: 1) матриця $(I - (A + \Delta A))$ повинна бути невивроженою; 2) $(q + \Delta q)^T (I - (A + \Delta A))^{-1} \alpha < 1$. Крім того, дана постановка задачі передбачає виключення інфляційних витрат, що виникають під впливом внутрішніх факторів. Враховуючи елементи матриці A це формалізується як:

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{a_{ij} + \Delta a_{ij}}{1 - (a_{jj} + \Delta a_{jj}) - (l_j (q_j + \Delta q_j) + d_j)} \leq \beta, j = \overline{1, n} \quad (8)$$

де l_j, d_j - задані коефіцієнти, а β - деяке задане порогове значення, що коригує неточність вхідних даних, задає резерв для безінфляційного збільшення доданої вартості (поза частки оплати праці) і задовольняє умову $0 < \beta < 1$.

Обмеження, яке забезпечує фізичний зміст модифікованої матриці прямих витрат A та вектора q - частка оплати праці у ціні продукції і формалізується у вигляді:

$$0 \leq q_j + \Delta q_j \leq 1, 0 \leq a_{ij} + \Delta a_{ij} \leq 1, i, j = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Невід'ємність та ненульове значення знаменника в (8) забезпечує обмеження:

$$a_{jj} + \Delta a_{jj} + l_j (q_j + \Delta q_j) + d_j \leq 1, j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Для стабільності розв'язку та забезпечення неперервності (6) та (7) вводиться обмеження на варіативність Δa_{ij} та Δq_j :

$$\underline{\Delta a_{ij}} \leq \Delta a_{ij} \leq \overline{\Delta a_{ij}}, i, j = \overline{1, n}, \underline{\Delta q_i} \leq q_i \leq \overline{\Delta q_i}, i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Обмеженість ресурсів для структурно-технологічних змін формалізується наступним співвідношенням:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{kij} \max(0, -\Delta a_{ij}) \leq B_k, k = \overline{1, K}, \quad (12)$$

де K - кількість ресурсів; B_k - обсяг k -го ресурсу, необхідного для усунення зниження витрат виробництва; b_{kij} - витрата k -го ресурсу при реалізації заходів, які гарантують одиначне зменшення необхідних витрат продукції i -ої галузі на виробництво продукції j -ої галузі. Обмеження (12) гарантує, що сукупні витрати на реалізацію структурно-технологічних змін не можуть перевищувати доступний обсяг B_k і виконує роль ресурсного балансу, який забезпечує реалістичність та економічну доцільність оптимізаційних рішень.

Як бачимо задачі (6) або (7) з обмеженнями (8) - (12) належать до класу нелінійних задач математичного програмування пошуку локальних екстремумів, у яких присутні дробово-лінійні (8) та негладкі

(12) обмеження, що визначає математичну складність задачі і обумовлює вибір методу розв'язування.

Наступним етапом дослідження зазначених моделей стало розроблення альтернативного варіанта шляхом введення нової змінної

$$z = (I - (A + \Delta A)^T)^{-1}(q + \Delta q). \quad (13)$$

Економічна інтерпретація змінної (13) полягає в тому, що її елементи відображають структуру кінцевих доходів, сформованої різними видами економічної діяльності. Саме ця структура визначає баланс інтересів між економічними агентами – як існуючих, так і потенційних. Тоді цільові функції сукупного доходу споживачів та мультиплікатора «приріст доходів – приріст виробництва» набувають вигляду:

$$D(z) = \frac{z^T h}{1 - z^T \alpha} \quad (14)$$

$$k(z) = z^T \alpha \quad (15)$$

Відповідно, задача оптимізації полягає у знаходженні таких значень $(\Delta A, \Delta q, z)$, які забезпечують максимум цільових функцій (14) та (15). При цьому вводиться додаткове обмеження $z^T \alpha < 1$, яке гарантує неперервність та обмеженість цільової функції (14). Додатково до існуючих обмежень (9)-(12), альтернативна модель включає наступне співвідношення:

$$z_j - \sum_{i=1}^n (a_{ji} + \Delta a_{ji}) z_i = q_j + \Delta q_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (16)$$

При цьому обмеження (8) шляхом відповідних перетворень приймає вид

$$\beta (a_{jj} + \Delta a_{jj}) + \beta (l_j (q_j + \Delta q_j) + d_j) + \sum_{i=1, i \neq j}^n (a_{ji} + \Delta a_{ji}) < \beta, \quad j = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Таким чином, альтернативна модель складається з двох цільових функцій (14) або (15) та системи обмежень (9) - (12), (16), (17). Варто відзначити, що цільові функції та відповідні обмеження визначені для будь-яких $(\Delta A, \Delta q, z)$, окрім множини вироджених випадків.

У перетвореній постановці задачі виключаються функції, які не визначені на всій області допустимих значень. Це усуває ризик виходу за межі області визначення під час оптимізації та забезпечує коректність розрахунків. Запропонований підхід розширює потенціал аналізу розв'язків і дозволяє обчислювати цільову функцію безпосередньо в точці глобального максимуму. Таким чином, обидва підходи є взаємодоповнюючими, а їх комбіноване застосування у модельних розрахунках є доцільним та обґрунтованим.

Побудовані моделі не лише мають теоретичну цінність, але й стали основою для програмних реалізацій. Першу таку реалізацію для пошуку локальних екстремумів цільових функцій (6) або (7) за умов (8) – (12) виконано за допомогою програми MULSTR мовою RATFOR. В подальшому була створена програма MULSTR1 для задачі (14) або (15), (9)-(12), (16), (17). Розрахунки проводилися на реальних даних агрегованого 18-галузевого балансу. Оскільки ресурсні обмеження для структурно-технологічних змін мали форму негладкої функції, задачі було зведено до безумовної максимізації з використанням методу «штрафних

функцій» та $r(\alpha)$ -алгоритму. Детальний опис цієї системи надано в [1,2]; фрагмент програми мовою RATFOR подано в [6].

Наступним етапом стала розробка системи IOMSTC (Міжгалузеві оптимізаційні моделі структурно-технологічних змін) для підтримки прийняття рішень при плануванні таких змін. Система створена в Інституті кібернетики Національної академії наук України та реалізована в середовищі DELPHI, що забезпечує гнучкість та зручність використання. IOMSTC включає користувацький інтерфейс, бази даних моделей та набір програмних модулів для реалізації алгоритмів оптимізації. Детальніше з характеристиками системи можна ознайомитися в [3].

У подальшому під керівництвом академіка М.В. Михалевича в Інституті кібернетики НАН України була розроблена комплексна система для структурно-технологічних змін MiSTC (Mikhalevich Structural and Technological Changes), що реалізувала ці моделі для практичного використання в економічному плануванні [4].

З поширенням та ускладненням міжгалузевих моделей структурно-технологічних змін постала потреба у використанні більш гнучких та потужних інструментів математичного програмування. Для розв'язання оптимізаційних задач структурно-технологічних змін було обрано мову моделювання AMPL (A Modeling Language for Mathematical Programming). Вона підтримує широкий спектр солверів, зокрема, SNOPT та BARON, які ефективно працюють з нелінійними обмеженнями та забезпечують пошук локальних і глобальних екстремумів. Також було використано відкритий NEOS-сервер, який надає доступ до обчислювальних кластерів і сучасних солверів без необхідності локального встановлення програмного забезпечення. Це дозволило розрахувати варіанти моделей (14) або (15) за умов (9)–(12), (16), (17). Тестові розрахунки здійснювалися для семи галузей. Детальний опис програмних реалізацій та отриманих результатів розрахунків наведено у [7].

Висновки. Оптимізаційні міжгалузеві моделі зі змінними коефіцієнтами прямих витрат є дієвим інструментом підтримки управлінських рішень у процесі планування структурних реформ. Моделі М. Михалевича розширюють можливості аналізу міжгалузевого балансу, враховуючи варіації матриці технологічних коефіцієнтів при максимізації сукупного доходу споживачів та мультиплікатора «приріст доходів – приріст виробництва». Запропоновані моделі разом із програмним забезпеченням та методологічною підтримкою становлять основу сучасних інформаційних технологій для забезпечення процесу прийняття ефективних управлінських рішень.

Література.

1. Sergienko I.V., Mikhalevich M.V., Stetsyuk P.I., Koshlai L.B. (1998) Interindustry model of planned technological-structural changes, *Cybern. Syst. Anal.* (34), 319-330. <https://doi.org/10.1007/BF02666973>

2. Mikhalevich M.V., Sergienko I.V. (2005) Modeling the Transitional Economy: Models, Methods, and Information Technologies. — Kiev: Naukova Dumka, p.672
3. Sergienko I.V., Mikhalevich M.V., Stetsyuk P.I., Koshlai L.B. (2009) Models and IT solutions supporting decision-making in structural and technological transformations, *Cybern. Syst. Anal.* (2), 26-49.
4. Bardadym T.A., Pilipovskiy A.V. (2014) The MiSTC system for solving optimization problems of interindustry planning of structural and technological changes. *Proceedings of the 4th International Conference "Mathematical Modeling, Optimization and Information Technologies" Chisinau, Republik of Moldova, March 25-28, 2014.* Chisinau: Eurika,. Vol. 2, 31–40.
5. Stetsyuk P.I., Bortis H., Emmeneger J.-F. et al. (2015) Institutional and technological changes in countries with market and transitional economies// *K.: Kyiv-Mohila Academy Publishing House*, p.336 [in English]
6. Stetsyuk P.I., Berezovskiy O.A., Lykhovyd O.P. (2023) Mathematical models, methods and software for planning intersectoral structural and technological changes. In *Non-smooth optimization methods in applied problems*. Kyiv: Lazurit Poligraph, P. 168-205. [in Ukrainian]
7. Volovyk O.I., Lykhovyd O.P. (2025) AMPL Implementation for Models of Structural and Technological Changes. *Cybernetics and Computer Technologies*, No.4, P. 65-87, DOI:10.34229/2707-451X.25.4.0 [in Ukrainian]

ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МЕНЕДЖМЕНТУ ЛАНЦЮГІВ ПОСТАЧАННЯ

Василь Горбачук, Максим Дунаєвський, Дмитро Ніколенко,
Лілія Товстенко
Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України

SUPPLY CHAIN MANAGEMENT SOFTWARE

Vasyl Gorbachuk, Maksym Dunaevskiy, Dmytro Nikolenko, Liliia
Tovstenko
V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, NAS of Ukraine

Abstract. The most common inventory situation faced by manufacturers, retailers, and wholesalers is that inventory levels are depleted over time and then replenished by the arrival of new batches of goods. A simple model that reflects this situation is the economic order quantity (EOQ) model, also known as the EOQ-model or the economic lot-size model. For practical solutions to multiechelon inventory optimization (MEIO) problems, the Stockpyl Python software package is worth considering. Stockpyl implements classic single-node inventory management models, including the EOQ-model, the newsvendor model, and the Wagner–Whitin model, which is a generalization of the EOQ-

model and takes into account the variability of demand over time by adapting the order lot size (the Wagner–Whitin model is also known as the dynamic lot-size model). Stockpyl software provides advanced functionality for simulation modeling of multi-level inventory management systems and includes implementations of MEIO algorithms under the stochastic-service model (SSM) and guaranteed-service model (GSM).

Галузь управління ланцюгами постачання (ЛП) поставала з усвідомлення менеджерами того, що діяльність ЛП, куди входять купівля, продаж, виробництво, складання (assembling), складування (warehousing), транспортування та доставка (delivery) товарів, має свою вартість, яку можна знижувати за рахунок ретельного аналізу того, як виконуються зазначені дії. Раніше ЛП сприймалися деякими менеджерами як джерело додаткових витрат. Як наслідок, мислення менеджерів ЛП зосереджувалося на зниженні витрат шляхом зменшення рівнів запасів, використання переваг економії від масштабу при перевезенні (shipping), оптимізації мережевих структур, зменшення мінливості попиту тощо. Загалом, такі операційні вдосконалення були непомітними для клієнтів компаній, якщо ці вдосконалення не вели до збільшення термінів виконання замовлень (lead times), частішого дефіциту товарів або іншого погіршення обслуговування.

Однак наприкінці минулого століття мета ЛП почала змінюватися, оскільки деякі фірми виявили, що ЛП можуть бути джерелом конкурентної переваги, а не просто рушієм витрат. Наприклад, фірма Dell (заснував у 1984 р. студент Майкл Делл зі штаб-квартирою в гуртожитку Техаського університету в Остіні; DELL у лістингу біржі NASDAQ до 2013 р.; Dell Technologies Inc. після злиття з EMC Corporation (заснована у 1979 р.; EMC у лістингу біржі NYSE до 2016 р.) у 2016 р.; DELL у лістингу біржі NYSE) продемонструвала, що завдяки відмінному менеджменту ЛП (supply chain management (SCM)) вона може постачати комп'ютери, повністю налаштовані відповідно до специфікацій покупця, лише через кілька днів після їх замовлення. (Дана робота виконується на комп'ютері Dell). Цим Dell зруйнувала існуючу парадигму покупок комп'ютерів, за якою споживачі могли вибирати лише з обмеженої кількості попередньо налаштованих (preconfigured) опцій. Аналогічно, фірма Walmart (започаткував у 1945 р. відставний капітан Сем Уолтон (Walton); WMT у лістингу біржі NASDAQ) показала, що може успішно керувати надзвичайно великим ЛП і розміщувати продукти на полицях магазинів за менші гроші на одиницю продукції (per item). В результаті Walmart запропонував своїм клієнтам високий рівень доступності продукції та низькі ціни, що вивело цю фірму на позицію найбільшого роздрібногo продавця у світі. Amazon (заснував у 1994 р. Джеф Безос (у 1990–1994 рр. працював у новоствореному хедж-фонді D.E.Shaw&Co, що спеціалізується на математичному моделюванні глобальної економіки) як Cadabra в переобладнаному гаражі свого будинку) створила ЛП, який є не тільки

швидким і надійним, але й багатофункціональним, пропонуючи користувачам різноманітні варіанти доставки, зручні інструменти відстеження (tracking) та гнучку політику повернення товару. Цей розширений ЛП дозволяв Amazon брати до уваги бажання споживачів миттєвого задоволення попиту, спроможності бачити та перевіряти продукти до їх купівлі.

Практика та вивчення SCM набувають свого значення. З початку нового тисячоліття публікується багато робіт, де пропуються та вивчаються математичні моделі для оцінки, аналізу й оптимізації ЛП. SCM став одним із найпопулярніших застосувань дослідження операцій (operations research (OR)) та однією з найбільших історій успіху OR. (Засновник відділу математичних методів дослідження операцій Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України академік Юрій Єрмольєв (1936–2022) був науковим керівником кандидатської дисертації одного з авторів даної роботи). Сучасне математичне вивчення ЛП стало вважатися не просто областю застосування інструментів OR, але й методологічною областю, спроможною розвивати власні інструменти і теоретичні засади. Ці інструменти тепер самі починають застосовуватися не лише до ЛП, а й до охорони здоров'я, енергетики, гуманітарної допомоги (relief), сфери послуг та інших галузей. Публікуються відповідні теоретичні засади [1], які відбивають еволюцію підходів до ЛП.

Хоча моделі та алгоритми найчастіше застосовуються до традиційних ЛП приватного сектору, багато з них можна застосувати до нових видів ЛП, а також до галузей, які не сприймаються як ЛП [2]. Знання структурних елементів традиційних ЛП сприяє розумінню новітніх застосувань теорії ЛП [3]. Інструменти теорії ЛП використовуються у прикладних галузях систем електроенергетики, охорони здоров'я, операцій державного сектору [4].

Методологія оптимізації запасів у багаторівневих ланцюгах постачання (multiechelon inventory optimization (MEIO)) передбачає одночасне управління страховими та операційними запасами на всіх ешелонах системи (постачальник – виробник – дистриб'ютор – ритейлер) з урахуванням їхньої стохастичної взаємозалежності. На відміну від локальної оптимізації на рівні окремого складу, MEIO мінімізує сукупні витрати внаслідок володіння запасами та дефіциту через глобальну координацію параметрів поповнення (момент перезамовлення, базовий рівень запасів, рівень сервісу) у всій мережі. Особливістю MEIO є врахування кореляції попиту, часових лагів термінів виконання замовлень, мінливості постачань, так званого ефекту батога (bullwhip) посилення флуктуацій на ЛП. MEIO є критично важливою для сучасного SCM, оскільки дозволяє підвищувати рівень сервісу при одночасному зниженні загального обсягу капіталу через накопичення запасів, яке можна оптимізувати в сучасних умовах, цифровізації, глобалізації та все зростаючої ринкової невизначеності.

Для розв'язування задач МЕІО розроблявся пакет прикладного спеціалізованого програмного забезпечення (ПЗ) Stockpyl на Python [5]. Stockpyl також реалізує класичні однорівневі моделі управління запасами, зокрема модель економічно оптимального обсягу замовлення (economic order quantity (EOQ)), модель газетяра (newsvendor) та модель Вагнера–Вітіна (Wagner–Whitin), яка є узагальненням EOQ-моделі та враховує мінливість попиту з часом, адаптуючи розмір партії замовлення (dynamic lot-size model). ПЗ Stockpyl надає розширений функціонал для імітаційного моделювання багаторівневих систем управління запасами і включає реалізації алгоритмів МЕІО за умов стохастичної моделі рівня обслуговування (stochastic-service model (SSM)), та моделі гарантованого рівня обслуговування (guaranteed-service model (GSM)). Stockpyl є ПЗ з відкритим кодом (open-source), доступним на ліцензійних умовах MIT License і розміщеним на GitHub (<https://github.com/LarrySnyder/stockpyl>).

МЕІО є значно складнішою порівняно з однорівневими задачами, насамперед, через те, що кожний заданий вузол або рівень має стохастичні періоди виконання замовлень (lead times) від їх висхідних (upstream) вузлів, незважаючи на детерміновані періоди виконання замовлень транспортом, оскільки висхідні вузли мають випадкові рівні дефіциту. Більше того, розподіл імовірностей часу виконання замовлень залежить від рівнів базових запасів (або інших параметрів стратегії управління запасами) на висхідних вузлах, які, в свою чергу, залежать від зазначеного розподілу. Оскільки такі зворотні зв'язки та взаємозалежності істотно ускладнюють обчислення очікуваних витрат для заданої множини рівнів базових запасів, то оптимізація цих витрат стає складною задачею.

Для розв'язування цієї задачі пропонуються моделі SSM та GSM. SSM [6, 7] передбачає, що на кожному рівні задовольняється попит від складів завжди, коли це можливо, або спостерігаються дефіцити запасів, подібно до однорівневих моделей, зокрема моделі газетяра. Через такі дефіцити періоди виконання на висхідних вузлах будуть стохастичними, а функція очікуваних витрат враховуватиме ці періоди виконання точно або наближено, значно ускладнюючи обчислення її значень та її оптимізацію.

Навпаки, GSM [8–10] передбачає, що кожний рівень встановлює детерміновану верхню межу для свого періоду виконання з постачанням на інші вузли. Зокрема, кожний рівень визначає свій CST і гарантує, що задовольнятиме будь-який попит відповідно до цього CST. Такий підхід забезпечує зручніше формулювання задачі МЕІО, оскільки періоди виконання від вищих рівнів стають детерміністичними. Водночас ця аналітична зручність досягається за рахунок достатньо жорсткого припущення про обмеженість попиту. Існує взаємно-однозначний взаємозв'язок між множиною CSTs (кожний вузол характеризується однією такою множиною) та множиною відповідних рівнів базових запасів. Якщо вважати SSM точнішою моделлю реальних систем запасів [11, 12], то підхід GSM можна вважати евристичним для встановлення рівнів базових запасів в системі SSM.

Пакет Stockpyl містить програмні модулі для розв'язання таких типів задач МЕІО: послідовна система SSM (модуль *ssm_serial*); послідовна або деревоподібна система в GSM (модулі *gsm_serial* та *gsm_tree*); системи SSM з довільною топологією, оптимізовані методом повного перебору чи покоординатного спуску (модуль *meio_general*).

У прикладі 3.1 [1] магазин продає 1300 шоколадних батончиків на рік. Розміщення замовлення постачальнику шоколадних батончиків коштує 8 грн. Кожний шоколадний батончик коштує магазину 0.75 грн. Витрати на зберігання шоколадних батончиків оцінюються як 30% на рік. Потрібно визначити оптимальний обсяг замовлення. Є код Stockpyl для EOQ-моделі, де постійні витрати на оформлення одного замовлення становлять $K = 8$ грн, витрати на зберігання одиниці продукції дорівнюють $h = 0.225$ грн, а попит становить $d = 1300$ одиниць [5].

У прикладі 4.1 [1] газетний кіоск стикається з процесами витрат і попиту, де витрати на зберігання (витрати c_o за надлишок (overage); вартість зберігання) $h = 0.18$ грн на одиницю товару, витрати на відсутність запасів (витрати c_u за недостачу (underage); вартість дефіциту) $p = 0.70$ грн на одиницю товару, а попит має розподіл $N(50, 8^2)$.

Потрібно визначити оптимальний обсяг замовлення газет для кіоску. Застосування теореми 4.1 [1] дає

$$S^* = F^{-1}[p / (h + p)] = F^{-1}(0.795) = 56.6,$$

де F^{-1} – обернена кумулятивна функція розподілу (cumulative distribution function). Якщо кіоск замовляє лише цілочисельне число газет (56 або 57), використовуємо формулу обчислення вартості

$$g(S) = h\bar{n}(S) + pn(S)$$

для сусідніх цілочисельних значень базового рівня запасу (stock) S , де

$$n(x) = E[(X - x)^+] = \int_x^{\infty} (y - x) f(y) dy,$$

$$\bar{n}(x) = E[(X - x)^-] = \int_0^x (x - y) f(y) dy,$$

$$[\bar{n}(x)]' = F(x),$$

де f – функція щільності ймовірності (probability density function). Одне із сусідніх цілочисельних значень гарантовано є оптимальним завдяки опуклості функції $g(S)$:

$$g(56) = 0.18\bar{n}(56) + 0.7n(56) = 2.0034,$$

$$g(57) = 0.18\bar{n}(57) + 0.7n(57) = 2.0000.$$

Тоді оптимальний цілочисельний обсяг замовлення газет дорівнює 57.

Якщо розподіл попиту є дискретним, то краще замовляти більше сусіднє цілочисельне значення (в даному прикладі 4.1 розподіл попиту є неперервним).

У прикладі 4.3 [1] виконуються припущення прикладу 4.1, звідки α -й квантиль (фрактиль (fractile)) стандартного нормального розподілу становить

$$z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) = 0.8255,$$

де $\alpha = p / (h + p)$, Φ^{-1} – обернена кумулятивна функція стандартного нормального розподілу. Тоді

$$g(S^*) = (p + h)\phi(\alpha)\sigma = 1.9976,$$

де ϕ – функція щільності ймовірності стандартного нормального розподілу.

Є код Stockpyl для задачі газетяра (для моделі оптимального розміру замовлення за умов невизначеного попиту), де витрати на зберігання одиниці продукції дорівнюють $h = 0.18$ грн, втрати від дефіциту (stockout cost) становлять $p = 0.7$ грн, а попит має нормальний розподіл з математичним сподіванням 50 і середньоквадратичним відхиленням $\sigma = 8$ [5].

Для моделі Вагнера–Вітіна Stockpyl дозволяє знаходити розв’язок за допомогою методу динамічного програмування (dynamic programming (DP)) [5].

Для стохастичних задач управління запасами зі скінченим горизонтом планування Stockpyl дозволяє знаходити розв’язок за допомогою методу DP [5].

Для стохастичних послідовних систем (stochastic serial systems (SSS)) Stockpyl реалізує модифікований алгоритм Кларка–Скарфа [5, 6, 7].

Stockpyl містить розширені засоби (features) для імітаційного моделювання багаторівневих (multiechelon) систем управління запасами. Імітаційне моделювання вищезазначеної послідовної системи дає результати для середніх витрат за період, близькі до отриманих теоретично [5].

Для оптимізації гарантованих (згідно зобов’язань) періодів часу обслуговування (Committed Service Times (CSTs)) в ациклічних моделях гарантованого обслуговування (GSMs) Stockpyl реалізує сучасний алгоритм DP [5, 10]. Архітектурно Stockpyl організовано у вигляді модулів, кожний з яких містить програмні компоненти, що відповідають за окремий аспект оптимізації або імітаційного моделювання систем управління запасами.

Stockpyl містить коди для розв’язування таких типів задач однорівневої (single-echelon) оптимізації запасів: задача економічно доцільного обсягу замовлення (EOQ-модель), її варіанти та модифікації; задача газетяра; задачі оптимізації (r, Q) та (s, S) ; задача Вагнера–Вітіна;

стохастичні задачі зі скінченним горизонтом з фіксованими витратами або без них; різні однорівневі задачі з невизначеністю пропозиції.

Модуль *eoq* містить код для розв'язування задачі EOQ-моделі та деяких її поширених варіантів. Ця задача, можливо, є найпершою та найпростішою задачею оптимізації запасів [13]. У задачі припускається, що попит є безперервним, детерміністичним і фіксованим, а також що є фіксована вартість розміщення замовлення та вартість зберігання запасів. Задача полягає у визначенні оптимальних обсягів замовлень.

Основною функцією модуля є функція *economic_order_quantity()*, яка реалізує базову EOQ-модель [13] і повертає параметри *order_quantity* (оптимальна кількість замовлення) та *cost* (відповідна оптимальна вартість).

Крім того, користувач може передавати обсяг замовлення Q до *economic_order_quantity()* в опційному параметрі *order_quantity*, а функція поверне розраховану вартість цього обсягу замовлення (і сам обсяг замовлення).

Подібні функції розв'язують задачі варіантів EOQ-моделі:

economic_order_quantity_with_backorders() реалізує задачу економічного обсягу замовлення з відкладеними замовленнями (economic order quantity problem with backorders (EOQB));

economic_production_quantity() реалізує задачу економічного обсягу виробництва (economic production quantity (EPQ));

joint_replenishment_problem_silver_heuristic() реалізує евристику Сільвера [14] для задачі спільного поповнення запасів (joint replenishment problem (JRP)).

Задача газетяра [15] (перший автор роботи [15] – Нобелівський лауреат 1972 р.) є, мабуть, найпростішою стохастичною задачею запасів. Модуль *newsvendor* містить код для розв'язування кількох різновидів цієї задачі.

Зазначимо, що функції в цьому модулі розв'язують одноперіодну задачу газетяра чи її аналог з нескінченним горизонтом. У випадку цього аналогу непродані товари можуть зберігатися від одного періоду до наступного у вигляді запасів (що веде до витрат на зберігання), а незадоволені вимоги (unmet demands) можуть зберігатися від одного періоду до наступного у вигляді відкладених замовлень (що веде до витрат через дефіцит). Тому аналог моделює задачу газетяра, хоча згадана одноперіодна задача та її аналог з нескінченним горизонтом є математично еквівалентними. Цю задачу також називають задачею оптимізації базових запасів, оскільки фірма дотримується політики базових запасів, а метою є пошук оптимального рівня базових запасів.

Функція *newsvendor_normal()* розв'язує задачу газетяра з нормально розподіленим попитом $N(\mu, \sigma^2)$. Ця функція має певну сигнатуру та повертає параметри *base_stock_level* (оптимальний рівень базових запасів) та *cost* (відповідна оптимальна очікувана вартість).

Крім того, користувач може передати рівень S базових запасів до `newsvendor_normal()` в опційному параметрі `base_stock_level`, а функція поверне відповідну очікувану вартість (і сам рівень базових запасів), розраховану як

$$g(S) = h \int_0^y (y-d) f(d) dd + p \int_y^\infty (d-y) f(d) dd = [hz + (p+h)]L(z)\sigma,$$

де $z = (S - \mu) / \sigma$, $L(z)$ – стандартна нормальна функція втрат.

Якщо користувач передає цій функції час виконання l у параметрі `lead_time`, то оптимальний рівень базових запасів задається

$$S^* = (l+1)\mu + \sqrt{l+1} z_\alpha \sigma,$$

що при $l = 0$ зводиться до

$$S^* = \mu + z_\alpha \sigma.$$

Функція `newsvendor_poisson()` розв'язує задачу для заявок Пуассона і має подібну до `newsvendor_normal()` сигнатуру, за винятком того, що не має параметра для стандартного відхилення.

Stockpyl надає функції, які дозволяють розв'язувати задачі газетяра із загальними розподілами (не обов'язково нормальними чи пуассоновськими). Функція `newsvendor_continuous()` призначена для неперервних розподілів. Це дозволяє користувачу вказати файл щільності розподілу для попиту одним із двох способів:

як об'єкт `scipy.stats.rv_continuous`;

як функцію одного аргументу, яка повертає файл щільності розподілу для цього аргументу (реалізація такої функції вимагає додаткових досліджень).

Сигнатура функції потребує вказання `demand_distrib` або `demand_pdf`.

Наявність і розвиток доступного ПЗ для SCM має практичне значення.

Література

1. Snyder L.V., Shen Z.-J. M. (2019). *Fundamentals of Supply Chain Theory*. 2-nd edition. Hoboken, NJ: Wiley.

2. Symonov D.I., Gorbachuk V.M. (2024). A method of finding solutions in a dynamic model of inventory management under uncertainty. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics*, 2022 (4), 31–39.
<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.431>

3. Горбачук В.М., Камуз А.О., Товстенко Л.М. (2026). Управління запасами з допустимим дефіцитом і знижками. *Наука і техніка сьогодні*, № 1 (55), 2097–2117.

4. Горбачук В.М., Камуз А.О., Товстенко Л.М. (2026). Управління багатоешелонним постачанням. *Наука і техніка сьогодні*, № 2 (56), 1692–1705.

5. Snyder L.V. (2023). Stockpyl: A Python Package for Inventory Optimization and Simulation. *INFORMS TutORials in Operations Research*, October 13, 156–197. <https://doi.org/10.1287/educ.2023.0256>
6. Clark A.J., Scarf H. (1960). Optimal policies for a multi-echelon inventory problem. *Management Science*, 6 (4), 475–490.
7. Chen F., Zheng Y.-S. (1994). Lower bounds for multi-echelon stochastic inventory systems. *Management Science*, 40 (11), 1426–1443.
8. Simpson K.F., Jr. (1958). In-process inventories. *Operations Research*, 6 (6), 863–873.
9. Kimball G.E. (1988). General principles of inventory control. *Journal of Manufacturing and Operations Management*, 1 (1), 119–130,
10. Graves C., Willems S.P. (2000). Optimizing strategic safety stock placement in supply chains. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2 (1), 68–83.
11. Graves S.C., Willems S.P. (2003). Erratum: Optimization strategic safety stock placement in supply chains. *Manufacturing and Service Operations Management*, 5 (2), 176–177.
12. Graves S.C., Willems S.P. (2003). Supply chain design: Safety stock placement and supply chain configuration. *Supply Chain Management: Design, Coordination and Operation. Handbooks in Operations Research and Management Science*. V. 11. De A.G.Kok, S.C.Graves (eds.). Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 95–132.
13. Harris F.W. (1990). How many parts to make at once. *Operations Research*, 38 (6), 947–950,.
14. Silver E.A. (1976). A simple method of determining order quantities in joint replenishments under deterministic demand. *Management Science*, 22(12), 1351–1361.
15. Arrow K.J., Harris T., Marschak J. (1951). Optimal inventory policy. *Econometrica*, 19 (3), 250–272.

МУЛЬТИКАРКАСИ І ЗВ'ЯЗНІСТЬ КВАЗИВИПАДКОВИХ ГРАФІВ

Глухов О.Д.

Київський авіаційний інститут

MULTIFRAMES AND CONNECTIVITY OF QUAZI-RANDOM GRAPHS

Abstract. We address the problem of estimating the probability of connectivity in quasi-random graphs. We introduce the concepts of multiframe of graph and connected graph polynomial. It will be shown how multiframe allow us to obtain estimates of the connectivity of quasi-random graphs.

Мультикаркаси графа.

Нехай $G = G_n$ - зв'язний граф на n вершинах з множиною вершин G^0 і множиною ребер G_n^1 , $|G^0| = n$, $|G^1| = m$ і нехай $U \subseteq G^1$ - деяка множина його ребер, через $G[U]$ будемо позначати мінімальний підграф графа G з множиною ребер $(G[U])^1 = U$ [1].

Означення 1. Мультикаркасом графа G будемо називати сімейство підмножин $\{E_j\}_{j=1}^s$ множини G^1 його ребер, яке задовольняє наступній умові:

для будь-якої множини W ребер графа G такої, що $\forall j W \cap E_j \neq \emptyset$, граф $G[W]$ буде зв'язним факторграфом графа G , тобто зв'язним підграфом, який містить усі вершини даного графа [1].

Приклади мультикаркасів.

1. Тривіальний мультикаркас.

Нехай G - зв'язний граф, T - його остовне дерево (каркас) з множиною ребер $T^1 = \{u_k\}_1^{n-1}$ ($n = |G^0|$). Тоді очевидно, що $M = \{E_k\}_1^{n-1}$, $E_k = \{u_k\}$, є мультикаркасом графа G .

2. Мультикаркас бондів. $M = \{U_k\}_1^s$, де $\{U_k\}_1^s$ множина усіх його бондів (мінімальних по включенню реберних розрізів) зв'язного графа G .

3. Мультикаркас 2-кліткового вкладення.

2-кліткове вкладення графа G в 2-многовид називається регулярним, якщо замикання кожної 2-клітки гомеоморфно замкненому диску, а замикання двох різних кліток не можуть мати більше одного спільного ребра графа. [2].

Нескладно довести, що кожному реберному розрізу U регулярно вкладеного графа G відповідає набір $\{Z_j\}_1^k$ простих циклів дуального

графу G^* , який задовольняє умові $\bigcup_{j=1}^k Z_j^1 = U$.

Якщо зв'язний граф G регулярно вкладений в деякий 2-многовид, а G^* - його дуальний граф, $\{Z_k\}_1^s$ усіх простих циклів графа G^* . Тоді множина $M = \{Z_k^1\}_1^s$ є мультикаркасом графа G .

Властивості мультикаркасів.

Лема 1. Сімейство множин $M = \{E_j\}_{j=1}^s$ буде мультикаркасом графа G тоді і тільки тоді, коли для будь-якого реберного розрізу U знайдеться таке E_k , що $E_k \subseteq U$.

Лема 2. Якщо M_1, M_2 - мультикаркаси зв'язних графів G_1, G_2 , $G = G_1 \cup G_2, G_1^0 \cap G_2^0 \neq \emptyset$, то $M = M_1 \cup M_2$ буде мультикаркасом графа G .

Означення 2. Регулярним гомоморфізмом f графа G на граф H будемо називати сюр'єктивне відображення множини вершин графа G на множину вершин графа H яке задовольняє наступним умовам:

1) прообраз кожної вершини графа G є зв'язним підграфом графа H ;

2) існує таке ін'єктивне відображення множини ребер графа H в множину ребер графа G , що
 $g(w) = u \Rightarrow \partial w = (f(x), f(y)) \& (\partial u = \{x, y\}) \& (f(x) \neq f(y))$

Лема 3. Нехай f - простий регулярний гомоморфізм графа G на граф H , $K = f^{-1}(z)$ - єдиний нетривіальний прообраз цього гомоморфізму, $M(K), M(H)$ - деякі мультикаркаси графів K і H відповідно, то $M(K) \cup M(H)$ буде мультикаркасом графа G .

Квазівипадкові графи.

Квазівипадкові графи є моделями дискретних систем, структура яких може змінюватись внаслідок випадкового розриву частини зв'язків [3-4].

Означення 3 [3]. Нехай $G = G_n$ - зв'язний граф на n вершинах з множиною вершин G^0 і множиною ребер G_n^1 , $|G^0| = n$, $|G^1| = m$, квазівипадковим графом на основі графа G називається граф $G(p)$ з множиною $G^0(p) = G^0$ вершин і з випадковою множиною $U = G^1(p)$ ребер для якої виконуються умови:

$$Prob(u \in U) = p, \text{ якщо } u \in G^1;$$

$$Prob(u \in U) = 0, \text{ якщо } u \notin G^1.$$

Означення 4 [5, 6]. Нехай $M = \{E_j\}_{j=1}^s$ деякий мультикаркас графа G , $\xi_k(M) = |\{E \in M : |E| = k\}|$. С-поліномом або зв'язністним поліномом мультикаркаса графа G назвемо поліном, визначений наступним чином:

$$C(G, M, x) = \sum_k \xi_k x^k.$$

Важливість С-полінома впливає з наступного твердження.

Теорема 1 [5,6] . Якщо G зв'язний граф, M - деякий його мультикаркас, то для ймовірності P зв'язності квазівипадкового графа $G(p)$ на основі графа G має місце наступна оцінка:

$$P \geq 1 - C(G, M, q), \text{ де } q = 1 - p.$$

Оцінки зв'язності квазівипадкових графів.

Використовуючи теорему 1 та властивості мультикаркасів (леми 1,2,3), можна довести наступні твердження про оцінки ймовірності зв'язності квазівипадкових графів.

Теорема 2. Якщо $G_n(p)$ квазівипадковий граф на основі 3-реберно зв'язного графа G_n , з n вершинами, $q = 1 - p$, $q = \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n \ln n}}$, де

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0, \text{ то граф } G_n(p) \text{ буде зв'язним з ймовірністю } P = 1 - o(1)$$

Теорема 3. Якщо зв'язний граф G з m ребрами допускає регулярне вкладення в деякий 2-многовид, а $G(p)$ квазівипадковий графа на основі графа G , $p = 1 - \alpha(m) / \sqrt{m}$, де $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0$, то граф $G(p)$ буде зв'язним з ймовірністю $1 - o(1)$.

Література

1. Diestel R. Graph Theory, Springer-Verlag, Heidelberg, Graduate Texts in Mathematics, Volume 173, 2017. — 428 P.
2. Mohar B., Thomassen C. Graphs on Surfaces. – Baltimore: John Hopkins Univ. Press, 2001. – 291 P
3. Глухов А.Д., Квазіслучайные графы и структурная устойчивость сложных дискретных систем // Электронное моделирование, т. 38, №5, 2016, с.35-41.
4. Глухов О.Д., Про зв'язність квазівипадкових графів. – Матеріали Міжнародного науково-практичного семінару імені А.Я. Петренюка «Комбінаторні конфігурації та їхні застосування» 14-16 червня 2023.- Запоріжжя-Кропивницький, 2023.- с.109-112.
5. Глухов О.Д. Про квазівипадкові графи на основі 3-реберно зв'язних графів. Матеріали XXIV Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їхні застосування», 13-15 червня 2024.- Запоріжжя-Кропивницький, 2024.- с.31-34.
6. Glukhov O.D. On the connectivity of quasi-random graphs. Електронне моделювання, т. 46, №6, 2024, с.3 -7. <https://doi.org/10.15407/emodel.46.06.003>.

КОМБІНАТОРНІ ПІДХОДИ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПЛАНУВАННЯ ПОВІТРЯНИХ КОРИДОРІВ ДЛЯ ТРАНСПОРТНИХ БПЛА В МІСТІ

Людмила Джума, Амін Джума
Українська державна льотна академія

COMBINATORIAL APPROACHES TO MODELING AND PLANNING AIR CORRIDORS FOR URBAN CARGO UAVs

Liudmyla Dzhuma, Amin Dzhuma
Ukrainian State Flight Academy

Abstract. Urban air mobility requires formalized mathematical models for designing and evaluating air corridors for cargo UAVs. Existing research focuses mainly on graph-based routing, flow optimization and performance-based airspace concepts within U-space/UTM frameworks [3-6]. This paper introduces the concept of an *urban airspace profile* as a multilayer combinatorial configuration describing the structural properties, capacity and critical points of the urban airspace. Graph invariants (degree, centrality, diameter, flow uniformity) are used to characterize the topology of the airspace and to assess the role of vertical transitions between altitude layers.

A demonstration model for the city of Kropyvnytskyi shows qualitative improvements in route flexibility and conflict reduction when vertical transitions are introduced. These tendencies are consistent with findings reported in the literature, where increased vertical connectivity in larger networks has been shown to reduce graph diameter, decrease load on critical nodes and improve flow uniformity. The proposed approach complements existing UAM airspace models by shifting the focus from route-level optimization to structural optimization of the airspace itself, and forms a basis for future large-scale studies integrating real flight data.

Вступ. Міські повітряні перевезення з використанням транспортних безпілотних літальних апаратів (БПЛА) потребують формальних моделей, здатних забезпечити безпечне та ефективне управління потоками. У сучасних дослідженнях повітряний простір здебільшого подається як граф маршрутів або як набір секторів із заданими обмеженнями продуктивності [3,5,6]. Концепції U-space (Європейська система управління рухом БПЛА, що забезпечує безпечний та ефективний доступ до повітряного простору для великої кількості дронів) та UTM (Unmanned Aircraft System Traffic Management) визначають загальні принципи сегментації повітряного простору, але не пропонують формального математичного апарату для структурного опису міського повітряного середовища [2].

У цій роботі пропонується інший підхід: міський повітряний простір розглядається як *багатошарова комбінаторна конфігурація*, а для його опису вводиться нове поняття – *повітряний профіль міста (urban airspace profile)*. На відміну від існуючих графових моделей,

комбінаторний підхід дозволяє аналізувати не лише маршрути, а й структуру повітряного простору як цілісну систему, включно з вертикальними переходами, інваріантами та структурною надлишковістю.

Гіпотеза дослідження. Застосування багатoshарової комбінаторної конфігурації та графових інваріантів для оптимізації маршрутів транспортних БПЛА забезпечує зростання пропускної здатності повітряних коридорів і зменшення кількості конфліктних точок порівняно з традиційними маршрутними моделями.

Метою дослідження є розробка комбінаторної моделі міського повітряного простору та повітряного профілю міста, що дозволяють оцінювати пропускну здатність повітряних коридорів і оптимізувати маршрути транспортних БПЛА.

Завдання:

1. Побудувати багатoshарову комбінаторну конфігурацію міського повітряного простору та ввести формальне визначення повітряного профілю міста.

2. Визначити графові інваріанти для оцінювання пропускної здатності, критичних точок та структурних властивостей повітряного простору.

3. Запропонувати підхід до маршрутної оптимізації на основі комбінаторних характеристик та дослідити роль вертикальних переходів у формуванні діаметра графа, рівномірності потоків і пропускної здатності з використанням розробленої демонстраційної моделі для м. Кропивницький.

Повітряний простір як багатoshарова комбінаторна конфігурація. Міський повітряний простір подається у вигляді конфігурації

$[(V, E_h, E_v, H),]$

де (V) – контрольні точки,

(E_h) – горизонтальні коридори,

(E_v) – вертикальні переходи,

(H) – висотні шари.

Такий підхід узагальнює класичні графові моделі повітряного простору [3,5,6] і дозволяє формально враховувати багатoshаровість, структурну надлишковість та роль вертикальних переходів як окремого інфраструктурного ресурсу.

Означення 1. *Повітряний профіль міста* – це структурний опис міського повітряного простору у вигляді багатoshарової комбінаторної конфігурації, що включає множину контрольних точок, коридорів, вертикальних переходів та систему інваріантів (ступінь, центральність, діаметр, індекс рівномірності потоків), які характеризують пропускну здатність і критичні точки мережі.

Таблиця 1

Параметри повітряного профілю (модельний приклад для м. Кропивницький)

Параметр	Значення
Кількість висотних шарів	3
Контрольні точки	24
Горизонтальні коридори	46
Вертикальні переходи	8
Середній ступінь вершини	3.1
Діаметр графа	9
Індекс рівномірності потоків (Gini)	0.32

Роль вертикальних переходів у структурі потоків. Вертикальні переходи між висотними шарами є дефіцитним ресурсом міського повітряного простору, оскільки їх кількість обмежена вимогами безпеки, геометрією міського середовища та пропускну здатністю. Вони виконують роль структурних вузлів, що з'єднують висотні шари, і визначають альтернативність маршрутів, стійкість мережі та можливість розведення потоків у вертикальному вимірі. У більшості робіт вони розглядаються як частина траєкторії, тоді як у запропонованій моделі – як окремий елемент інфраструктури, що впливає на:

- структурну надлишковість,
- альтернативність маршрутів,
- навантаження на критичні вузли,
- рівномірність потоків,
- конфліктність.

Для оцінювання ефективності запропонованої комбінаторної моделі було побудовано базову одношарову модель повітряного простору без вертикальних переходів. Порівняння показало, що багатшарова конфігурація забезпечує менший діаметр графа, вищу структурну надлишковість, більш рівномірний розподіл потоків та зменшення кількості конфліктних точок.

Таблиця 2

Результати моделювання

Показник	Базова модель	Комбінаторна модель	Зміна
Пропускна здатність, БПЛА/год	42	51	+21%
Конфліктні точки	9	6	-33%
Діаметр графа	11	9.5	-14%
Завантаженість вертикальних переходів	0.83	0.64	-23%

У демонстраційній моделі для м. Кропивницький додавання вертикального переходу забезпечує якісне покращення маршрутизації та зменшення локальних конфліктів. Ці тенденції узгоджуються з результатами масштабних досліджень, де підвищення вертикальної зв'язності зменшує діаметр графа, розвантажує критичні вершини та покращує рівномірність потоків.

Висновки. Запропонований комбінаторний підхід дозволяє оптимізувати структуру міського повітряного простору, а не лише маршрути. Введене поняття *повітряного профілю міста* та використання графових інваріантів створюють основу для формалізованого опису, порівняння та планування повітряних коридорів для транспортних БПЛА.

Демонстраційна модель підтверджує якісні переваги вертикальних переходів, а подальше масштабування – зокрема інтеграція відкритих польотних даних (ADS B, U space open data) та відкритих геопросторових даних [1] – дозволить отримати кількісні результати у міському масштабі та оцінити пропускну здатність УАМ інфраструктури з високою точністю.

Література

1. Джума, Л., & Джума, А. (2026). Оцінювання відкритих даних та інструментів для моделювання пропусної здатності повітряного простору БПЛА. У *Матеріали XLIII Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених, здобувачів вищої освіти «Авіація та космонавтика: напрями інноваційного розвитку» (8 квітня 2026 року)* (сс. 268-271). Українська державна льотна академія. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.19650422#page=268>
2. EASA. (2021). *U-space Concept of Operations*. European Union Aviation Safety Agency. <https://www.easa.europa.eu/en/document-library>
3. Gardi, A., Sabatini, R., & Ramasamy, S. (2016). UAV trajectory optimisation for urban environments. *Aerospace Science and Technology*, 58, 284-297. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.08.032>
4. ICAO. (2020). *UTM Framework Edition 2*. International Civil Aviation Organization. <https://www.icao.int/safety/UA/Documents/UTM%20Framework%202020.pdf>
5. Sabatini, R., Gardi, A., & Ramasamy, S. (2019). Avionics, navigation and communication systems for unmanned aircraft. *Progress in Aerospace Sciences*, 102, 1- 46. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2018.06.002>
6. Sunil, E., Hoekstra, J., Ellerbroek, J., & Bussink, F. (2017). Metropolis: Airspace structure and capacity for high density urban UAV traffic. *SESAR Innovation Days*. <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid%3A0e0f7d3c-4b7e-4e3a-9e3a-0b2d8f4c1c5e>

ПОШУК ВСІХ ОПТИМАЛЬНИХ МАРШРУТІВ НАЙМЕНШОГО ЧАСУ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ «ВИННИХ ШЛЯХІВ»

¹Сгер М.Д., ²Стецюк П.І.

1. Ужгородський Національний Університет

2. Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

FINDING ALL OPTIMAL TIME ROUTES FOR “WINE ROUTES” CONSTRUCTION PROBLEM

Abstract. The paper considers the problem of finding all alternative optimal minimum-time routes for the Vienna–Venice wine route. The route consists of three segments: Vienna–Maribor, Maribor–Gorizia, and Gorizia–Venice. The problem is solved using Mixed Integer Linear Programming (MILP) for 23 wineries (9 wineries on the first segment, and 7 wineries on the second and third) with a mandatory visit to exactly one winery per segment. To enumerate all optimal solutions, the cutting-plane method is applied. Computational experiments were performed on the NEOS optimization server using the FICO-Xpress 9.8.0 solver.

Вступ. У статті [1, 2] представлена математична модель для побудови спеціалізованого маршруту з мінімальним часом подорожі вздовж винної дороги «Відень – Венеція» розбитої на три сегменти: Відень – Марібор, Марібор – Горіція та Горіція – Венеція, за умов обов'язкового відвідування рівно однієї винарні на кожному сегменті маршруту, з урахуванням часу перебування на кожній локації та часу переміщення між ними.

Задача побудови спеціалізованого маршруту з мінімальним часом подорожі сформульована у вигляді задачі змішаного цілочислового лінійного програмування. Запропонована в роботах математична модель використовує обмеження Міллера – Такера – Земліна для забезпечення зв'язності маршруту.

У цій роботі пропонується розширення запропонованої математичної моделі для відшукування всіх альтернативних маршрутів, час подорожі по яким буде мінімальним, при цьому кожен альтернативний маршрут повністю задовольняє умовам задачі.

Математична модель побудови спеціалізованого маршруту мінімального часу. В роботах [1, 2] автори задають вектор Q_k такий, що $\sum_{k \in 1..m} Q_k = n - 2$, де n – загальна кількість пунктів для відвідування (міста + винарні). Вектор Q_k буде задавати кількість міст та винарень на кожній ділянці маршруту k . Важливо зазначити, що кожна ділянка маршруту, починаючи з другої, перетинається з попередньою ділянкою маршруту на одну вершину, при чому ця вершина є останньою вершиною для ділянки $k-1$ та першою вершиною для ділянки k . Для нашої задачі такими вершинами будуть міста Марібор та Горіція.

Задається вектор K_k такий, щоб кожен елемент цього вектору задавав кількість вершин через які обов'язково має проходити маршрут на k -й ділянці (очевидно, що початок і кінець ділянки обов'язково включаються у це число).

Задається матриця t_{ijk} – час подорожі з точки i до точки j на ділянці k та T_{ik} – мінімальний час проведений у вершині i k -ї ділянки;

Вводяться наступні змінні:

• $x_{ijk} = 0 \vee 1$; $k = 1,2,3$; $i, j = 1..Q_k$, $i \neq j$ – булеві змінні, кожна з яких дорівнює одиниці, якщо маршрут проходить від i -го пункту в j -й на k -й ділянці, а інакше нулю;

• $y_{ik} = 0 \vee 1$; $k = 1,2,3$; $i = 1..Q_k$; – булеві змінні, кожна з яких дорівнює одиниці, якщо i -та вершина на k -й ділянці була пройдена циклом, і нулю – інакше;

• $u_{ik} \in Z$, $1 \leq u_{ik} \leq K_k$; $k = 1,2,3$; $i = 2..Q_k$ – цілочислові змінні, для обмеження Міллера – Такера – Земліна, що набувають значень від 1 до K_k і позначають крок, на якому маршрут проходить через відповідну вершину i .

Оптимізаційну задачу для мінімізації часу проходження маршруту та відвідування винарень записують наступним чином:

$$t_{min} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{Q_k} \sum_{j=1, i \neq j}^{Q_k} t_{ijk} \cdot x_{ijk} + \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^{Q_k} T_{ik} \cdot y_{ik} \quad (1)$$

за обмежень:

$$\sum_{i=2}^{Q_k} x_{1ik} = 1, \quad \sum_{i=1, i \neq Q_k}^{Q_k} x_{iQ_k k} = 1, \quad \forall k = 1,2,3 \quad (2)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{Q_k} x_{ijk} = y_{ik}, \quad \sum_{j=1, i \neq j}^{Q_k} x_{jik} = y_{ik}, \quad \forall k = 1,2,3; \quad \forall i = 2..Q_{k-1}, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{Q_k} y_{ik} = K_k - 2, \quad \forall k = 1,2,3 \quad (4)$$

$$u_{ik} - u_{jk} + K_k \cdot x_{ijk} \leq K_k - 1, \quad \forall k = 1,2,3; \quad \forall i, j = 2..Q_k, i \neq j, \quad (5)$$

$$x_{ijk} = 0 \vee 1; \quad k = 1,2,3; \quad i, j = 1..Q_k, i \neq j, \quad (6)$$

$$y_{ik} = 0 \vee 1; \quad k = 1,2,3; \quad i = 2..Q_{k-1}, \quad (7)$$

$$u_{ik} \in Z, \quad 1 \leq u_{ik} \leq K_k; \quad k = 1,2,3; \quad i = 2..Q_k, \quad (8)$$

Мінімізація цільової функції (1) відповідає знаходженню маршруту, час проходження по якому мінімальний. Обмеження (2) задають умову того, що маршрут обов'язково починається в першій і закінчується в

останній точці k -ї ділянки. Обмеження (3) гарантують, що вершина y_{ik} дорівнює одиниці тоді і тільки тоді, коли маршрут прийшов і вийшов з i -ї точки k -ї ділянки. Обмеження (4) задають умову того, що кількість вершин через які пройшов маршрут на k -й ділянці, дорівнює кількості обов'язкових для проходження вершин, за винятком першої (початку ділянки) та останньої (кінця ділянки). Обмеження (5) є обмеженнями Міллера – Такера – Земліна, що забезпечують зв'язність маршруту.

Розширення моделі для відшукування всіх розв'язків. Для знаходження всіх альтернативних маршрутів застосовується метод відсікань, досліджуваний у роботах [3, 4]. Нехай задача має c оптимальних розв'язків. Після знаходження чергового оптимального розв'язку S_m , для будь-якого $m=1, \dots, c$ до задачі додається обмеження виключення:

$$\sum_{(i,j,k) \in X_m} t_{ijk} \cdot x_{ijk} + \sum_{(i,k) \in X_m} T_{ik} \cdot y_{ik} \leq z^* - \frac{1}{2}, \forall m = 1, \dots, c \quad (9)$$

де: z^* - час проходження по знайденому оптимальному маршруту S_m ; (i,j,k) - активні (не нульові) дуги X_m знайденого оптимального маршруту S_m ; (i,k) - активні (не нульові) винарні Y_m знайденого оптимального маршруту S_m .

Розв'язок задачі (1) – (9) буде новим оптимальним маршрутом, якщо час проходження по ньому буде дорівнювати z^* .

Якщо після застосування c відсікань задача повертає $t_{min} > z^* - 1/2$, це свідчить про відсутність інших оптимальних розв'язків. Процедура завершується не більше ніж за стільки кроків, скільки існує оптимальних розв'язків задачі або після відшукування c маршрутів.

Обчислювальний експеримент. Розглядався спеціально підготовлений тестовий приклад для якого заздалегідь відома кількість оптимальних маршрутів (4 маршрути з альтернативними гілками на 2-му та 3-му сегментах) та був знайдений маршрут мінімального часу подорожі, що складає 681 хвилину.

Маршрут Відень – Венеція розбивається на 3 сегменти. Задаються вектори $K_k = \{3, 3, 3\}$ (по одній винарні на сегмент) та $Q_k = \{11, 9, 9\}$ (загальна кількість вузлів на сегмент з урахуванням початкової та кінцевої точок). Маршрут містить 27 винарень у трьох країнах. До Сегменту 1 відносяться 9 виноградарників в Австрії та Словенії, до Сегменту 2 – 7 винарень регіонів Брда та Коліо (Словенія та Фріулі, Італія), до Сегменту 3 – 7 винарень Фріулі та пагорбів Просекко (Італія). Матриця часів переміщення t_{ijk} задана у хвилинах, час перебування у кожній винарні покладений 60 хв. Список винарень у відповідності до сегментів наведено у таблиці 1.

Таблиця 1. Перелік виноградників та міст (★ – оптимальний маршрут)

№	№ Сер.	Назва	Час переб., хв
1	1	Vienna	—
2	1	Nigl	60
3	1	WeinbauHummelberger	60
4	1	Weingut Sulzer-Boos	60
5	1	★ Weingut Geiszler	60
6	1	Wine Castle Family Thaller	60
7	1	Weingut Gollenz	60
8	1	Dveri Pax Jaringhof	60
9	1	Bogomir Valdhuber	60
10	1	VINOGRADI HORVAT	60
11	1,2	Maribor (депо)	—
12	2	Lepa Vida winery	60
13	2	Vina Fornazarič / Fornazarič Wines	60
14	2	Simčič Bjanski Grič	60
15	2	KRISTALVIN Winery	60
16	2	★ Draga Boutique Winery	60
17	2	Azienda agricola Villa Vasi	60
18	2	Princic Dario	60
19	2,3	Gorizia (депо)	—
20	3	Bessich Wines — One Family. Great Wines	60
21	3	Villa Bogdano 1880 — Organic Wines	60
22	3	Miglio Rosso	60
23	3	★ Sfriso Winery	60
24	3	Winery Ornella Bellia	60
25	3	CANTINA LA FRASSINA	60
26	3	Pitars	60
27	3	Venice (депо)	—

Задача реалізована мовою AMPL [5] та розв'язана за допомогою солвера FICO-Xpress [6] версії 9.8.0 на оптимізаційному веб-сервісі NEOS [7].

Перерахунок розв'язків зроблений засобами файлу команд з використанням двопроблемної структури: перша проблема без відсікань знаходить z^* ; друга – з активними відсіченнями знаходить альтернативні маршрути.

В таблиці 2 наведено порівняння характеристик задачі до та після додавання першого відсічення (стан перед другим розв'язком).

Таблиця 2. Порівняння характеристик задачі за даними FICO-Express

Показник	Задача (1) – (8)	Задача (1) – (9)	Різниця
Змінних (всього)	303	303	0
— бінарних (x, y)	277	277	0
— неперервних (u, MTZ)	26	26	0
Обмежень (до presolve)	257	258	+1
Ненульових елементів	1 131	1 140	+9
Видалено presolve	12	61	+49
Ітерацій симплекс-методу	3	15	×5
Вузлів гілкування	1	1	0

Ключовий спостережений факт: кожне нове відсічення додає рівно 1 обмеження та 9 ненульових елементів до матриці задачі. Кількість змінних не змінюється взагалі. Після 4 відсікань задача містить 261 обмеження та 1167 ненульових елементів. Незважаючи на п'ятикратне збільшення кількості ітерацій симплекс-методу (з 3 до 15), солвер розв'язує кожну підзадачу з єдиним вузлом гілкування, що свідчить про практичну ефективність підходу.

Солвер отримав рівно 4 альтернативні оптимальні маршрути з однаковим мінімальним часом $z^* = 681$ хвилини. Повнота перерахування доведена: п'ятий розв'язок задачі повертає $t_{min} = 685 > z^* + 0.5$, що є строгим маркером відсутності інших маршрутів. Отримані результати наведені в таблиці 3. Таблиця 3 у колонках для відповідного сегменту містить назву винарні, через яку проходить знайдений маршрут.

Таблиця 3. Знайдені маршрути мінімального часу ($t_{min} = 681$ хв).

№	Сегмент 1	Сегмент 2	Сегмент 3	Маршрут
S1	Weingut Geiszler	Draga Boutique Winery	Pitars	1→5→11→ 16→19→26 →27
S2	Weingut Geiszler	Draga Boutique Winery	Sfriso Winery	1→5→11→ 16→19→23 →27
S3	Weingut Geiszler	Vina Fornazarič	Sfriso Winery	1→5→11→ 13→19→23 →27
S4	Weingut Geiszler	Vina Fornazarič	Pitars	1→5→11→ 13→19→26 →27

Аналіз таблиці 3 показує наступне:

- Сегмент 1: у всіх 4 маршрутах єдиним оптимальним вибором є Weingut Geiszler (вузол 5).

• Сегмент 2: два альтернативні виноградники – Draga Boutique Winery (вузол 16, S1/S2) та Vina Fornazarič / Fornazarič Wines (вузол 13, S3/S4) – забезпечують однаковий загальний час маршруту.

• Сегмент 3: два альтернативні виноградники – Sfriso Winery (вузол 23, S2/S3) та Pitars (вузол 26, S1/S4) рівноцінні за критерієм мінімального часу.

Згідно отриманих результатів модель коректно ідентифікувала задані особливості тестового прикладу і правильно знайшла всі оптимальні розв'язки.

Висновки. У роботі розроблено та реалізовано методику пошуку всіх оптимальних маршрутів мінімального часу для «винного шляху» Відень – Венеція на основі методу відсікань [3, 4]. Задача розв'язана для 23 винарень зі статті [1] ($Q_k = \{11, 9, 9\}$, $K_k = \{3, 3, 3\}$).

Як результат виявлено рівно 4 альтернативні оптимальні маршрути (5-й розв'язок: $t_{\min} = 685 > z^* + 0.5$). Всі знайдені маршрути проходять через Weingut Geiszler (вузол 5) на Сегменті 1. Альтернативні гілки - дві винарні на Сегменті 2 (Draga Boutique Winery або Vina Fornazarič) та дві на Сегменті 3 (Sfriso Winery або Pitars). Кожне відсічення додає рівно одне обмеження та 9 не нулів при незмінній кількості змінних. Солвер FICO-Xpress розв'язує кожну підзадачу за ≤ 15 ітерацій симплекс-методу з 1 вузлом гілкування.

Перспективним напрямком є розширення моделі: $K > 3$ (більше однієї винарні на ділянку), врахування часових вікон роботи виноградників, комбінування точних методів із LLM для динамічного оновлення та формування даних для задачі та збагачення маршрутів якісними характеристиками.

Література

1. Yeher M.D., Stetsyuk P.I., Lefterov O.V., Fedosieiev O.I. The Problem Of Constructing Specialized Routes For Vienna – Venice Wine Route. *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*. 2025. P. 270–280. <https://doi.org/10.15421/322523>
2. Єгер М.Д., Лефтеров О.В. Задачі побудови спеціалізованих маршрутів на прикладі «винного шляху» Відень – Венеція. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2026. **1**. С. 5–15. <https://doi.org/10.34229/2707-451X.26.1.1>
3. Стецюк П.І., Слабоспицька О.О., Ушакова О.О. Максимальні незалежні множини вершин графа та їх застосування в керуванні проектами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2016. С. 151–162. <https://doi.org/10.15421/321614>
4. Задорожний Б.О., Корчинський О.О., Стецюк П.І., Швець А.В. Як знайти всі розв'язки задачі комівояжера? *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2022): Тези доповідей XX Міжнародної науково-практичної конференції*. 2022. С. 88–89.

- <http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2022/12/MPZIS-2022-1.pdf> NEOS Solver. <https://neos-server.org/> (Дата звернення: 28.04.2025)
5. Fourer R., Gay D.M., Kernighan B.W. AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming. 2nd ed. *Duxbury Press*, 2002. 540 p.
6. FICO Xpress Optimization Suite. *FICO Xpress-Optimizer Reference Manual. Version 9.8. Fair Isaac Corporation*, 2024. <https://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization> (Останнє звернення: 1.05.2026 p.)
7. Czyzyk J., Mesnier M.P., Moré J.J. The NEOS server. *IEEE Journal on Computational Science and Engineering*. 1998. Vol. 5, No. 3. P. 68–75.

ГІПЕРГРАФОВА МОДЕЛЬ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ КРАЇН ЗА ІНДЕКСОМ ЕКОНОМІЧНОЇ СКЛАДНОСТІ З ІНТЕГРАЦІЄЮ ДАНИХ ПРО ТОВАРНУ СТРУКТУРУ ЕКСПОРТУ

Олександр Єфанов, Анна Бакурова
Національний університет «Запорізька політехніка»

HYPERGRAPH MODEL FOR CLUSTERING COUNTRIES BY ECONOMIC COMPLEXITY INDEX WITH INTEGRATION OF EXPORT PRODUCT STRUCTURE DATA

Oleksandr Yefanov, Anna Bakurova
National University "Zaporizhzhia Polytechnic"

Abstract. This paper develops a hypergraph model for clustering countries based on the Economic Complexity Index (ECI), integrating export product structure data (RCA, PCI). The study aims to enhance the quality of country grouping and improve the economic interpretability of results compared to traditional clustering methods. The research utilizes the mathematical framework of hypergraph theory, where hyperedges group countries with similar economic complexity profiles, and edge weights are adjusted using Revealed Comparative Advantage (RCA) coefficients. The software implementation is performed in Python using hypernetx, pandas, and plotly libraries to process OEC data and visualize clusters. Experimental results show that integrating RCA as a weight multiplier increased the model's modularity from 0.01120 to 0.10474 (nearly a 10-fold increase), indicating a significant improvement in the quality of community detection. Using the Product Complexity Index (PCI), the technological level of the formed clusters was analyzed, and key trade flows between them were identified. The developed solution can be applied to automate economic research and analyze the economic growth potential of nations.

Сучасний етап розвитку світової економіки характеризується переходом від сировинно-орієнтованих моделей до економік, заснованих

на знаннях та високотехнологічному виробництві. Одним із найбільш визнаних інструментів вимірювання рівня економічної складності є індекс економічної складності (Economic Complexity Index, ECI), запропонований С. Хідалго та Р. Хаусманном у 2009 році та розвинений у подальших роботах Гарвардського та МІТ центру економічного розвитку. Індекс ECI враховує не лише обсяги експорту, а й різноманітність та унікальність виробленої продукції, що дозволяє об'єктивно оцінювати потенціал довгострокового економічного зростання країн.

Проте більшість наявних досліджень (Hidalgo, Hausmann, 2009; Hausmann et al., 2014; O'Clery et al., 2021) використовують традиційні методи кластеризації (k-means, ієрархічна кластеризація, спектральна кластеризація) [1], які мають суттєві обмеження: вони не враховують складну мережеву природу економічних взаємозв'язків, чутливі до ініціалізації та не дозволяють адекватно моделювати ситуації, коли одна країна може одночасно належати до кількох економічних груп у різні періоди часу. У 2024–2025 рр. з'явилися перші роботи (Kumar et al., 2024; Venati et al., 2025), що пропонують використовувати гіперграфи та функцію модулярності для виявлення спільнот у складних мережах вищого порядку [2], [3]. Гіперграфовий підхід є природним для задач економічної складності, оскільки дозволяє одному гіперребру містити довільну кількість країн, які мають подібні значення ECI в один і той же рік.

Метою дослідження була розробка гіперграфічної моделі кластеризації країн за ECI з інтеграцією додаткових даних про товарну структуру експорту (RCA, PCI) для підвищення модулярності та економічної інтерпретованості результатів. RCA — Revealed Comparative Advantage (виявлена порівняльна перевага) — коефіцієнт, що показує, наскільки країна спеціалізується на певному товарі порівняно зі світовим середнім (формула $RCA > 1$ означає перевагу). PCI — Product Complexity Index (індекс складності товару) — метрика, що оцінює технологічну складність товару на основі диверсифікації та унікальності країн-експортерів (вищі значення — високотехнологічні товари).

Запропоновано інструмент, який дозволяє користувачам легко працювати з базами даних ОЕС завдяки візуалізації кластерів, автоматичному обчисленню RCA для вагування гіперребер і відображенню результатів у зрозумілому вигляді. ОЕС — The Observatory of Economic Complexity — відкрита база даних, розроблена МІТ та Гарвардським університетом, що містить експортно-імпортні дані по країнах, товарах та роках, а також розрахункові показники ECI, RCA та PCI [4]. Об'єктом дослідження виступили реляційні бази даних ОЕС з даними про ECI та експорт/імпорт товарів. Предметом дослідження — методи удосконалення гіперграфічної кластеризації з використанням RCA та PCI.

Ключовим критерієм якості виділених економічних кластерів у роботі обрано функцію гіперграфової модулярності. На відміну від класичної модулярності Ньюмана, яка оптимізована для парних мереж, гіперграфова модулярність враховує неоднорідність розмірів гіперребер. Математично

вона визначається як різниця між фактичною часткою гіперребер, що містяться всередині кластерів, та їхнім очікуваним значенням у випадковому гіперграфі з ідентичним розподілом ступенів вершин. Оптимізація цього показника дозволяє виявити стійкі "економічні спільноти" — групи країн, чії експортні профілі демонструють статистично значущу схожість у межах спільних товарних ринків, що є прямим індикатором приналежності до єдиного технологічного укладу.

Процес побудови аналітичної моделі включає декілька послідовних етапів формалізації даних:

1. **Нормалізація та фільтрація:** На основі сирих даних про обсяги експорту розраховується індекс виявленої порівняльної переваги (RCA) для кожної пари "країна-товар". Для подальшого аналізу залишаються лише зв'язки, де $RCA \geq 1$, що свідчить про значущу присутність країни на ринку.
2. **Інцидентність гіперграфа:** Формується гіперграф $H = (V, E)$, де множина вершин V відповідає країнам, а кожне гіперребро $e \in E$ представляє окрему товарну групу (за класифікацією SITC або HS). Гіперребро включає всі країни, які мають порівняльну перевагу у виробництві цього товару.
3. **Вагування:** Кожному гіперребру присвоюється вага, пропорційна Індексу складності продукту (PCI). Це дозволяє алгоритму кластеризації надавати більшого пріоритету високотехнологічним товарам при формуванні меж кластерів»

Розробка виконувалася мовою Python із використанням бібліотек:

- pandas, numpy – для обробки даних та обчислення RCA/PCI;
- hypernetx – для побудови та візуалізації гіперграфів;
- plotly – для інтерактивних карт та анімацій.

Ключовим результатом дослідження є розроблена модель, яка:

- автоматично аналізує структуру бази даних ОЕС і визначає можливі зв'язки між таблицями (ECI, експорт, RCA);
- відображає структуру кластерів на графічному інтерфейсі у вигляді карт та графів;
- дозволяє обчислювати PCI по кластерах та виводити результати у текстовому або табличному вигляді.

Обчислення RCA проводилося за формулою:

$$RCA_{c,p,y} = \frac{(export_{c,p,y}/total_export_{c,y})}{(total_export_{p,y}/total_world_export_y)}$$

де $export_{c,p,y}$ — експорт країни c товару p у році y .

Після інтеграції RCA як множника до ваги гіперребер модулярність Q підвищилася з 0.01120 (базова модель) до 0.10474 (майже в 10 разів) після 50 ітерацій локального пошуку, що свідчить про суттєве покращення якості кластеризації.

Для розв'язання задачі розбиття гіперграфа на кластери (community detection) у роботі застосовано евристичний ітеративний алгоритм локального пошуку. Оскільки задача максимізації модулярності є NP-важкою, використаний підхід базується на принципі жадібної оптимізації: на кожному кроці алгоритму розглядається можливість переміщення окремої вершини (країни) до суміжного кластера. Переміщення здійснюється лише у випадку, якщо воно забезпечує приріст цільової функції модулярності.

Для інтерпретації кластерів використано PCI, що дозволяє класифікувати блоки за рівнем технологічної складності.

Таблиця 1
Середній PCI по кластерах

Кластер	Середній PCI	Стандартне відхилення	Кількість країн
5	0.010130	0.000312	19
4	0.010120	0.000290	22
0	0.010093	0.000215	40
1	0.010059	0.000000	22
3	0.010059	0.000000	17
2	0.009981	0.000348	20

Торгівельні потоки між кластерами підтверджують сильну взаємодію між технологічним і перехідним блоками (до 20 трлн \$ експорту).

Усі обчислення та експерименти проведено на відкритих даних бази The Observatory of Economic Complexity (OEC) [4].

Висновки. Розроблене програмне рішення може бути використане для освітніх цілей, роботи з реальними базами даних ОЕС у бізнесі або для автоматизації рутинних операцій у економічних дослідженнях. Подальшими перспективами досліджень можуть бути удосконалення інтерфейсу програми, розширення її функціоналу для підтримки складніших аналізів (торгівельні мережі, прогноз ЕСІ), інтеграція з іншими базами даних, окрім ОЕС.

Література

1. Hidalgo, C. A., & Hausmann, R. (2009). The building blocks of economic complexity [The building blocks of economic complexity]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(26), 10570–10575.
2. Benati, S., Schubert, D., & Todri, V. (2025). Hypergraph modularity maximization for community detection [Hypergraph modularity maximization for community detection]. *Omega*, 123, 102345. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2025.102345>
3. Kumar, T., Otter, N., & Sharma, Y. (2024). Hypergraph clustering by iteratively reweighted modularity maximization [Hypergraph clustering by

iteratively reweighted modularity maximization]. Applied Network Science, 9(1), 1–25.

4. The Observatory of Economic Complexity. (2025). OEC Database: ECI, export, import, PCI, RCA, distance (1995–2023) [OEC Database: ECI, export, import, PCI, RCA, distance (1995–2023)]. Retrieved from <https://oec.world>

СОЦІАЛЬНИЙ ГРАФ УЧАСНИКІВ GLOBAL GAME JAM UKRAINE: ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ

Олексій Ізвалов

Економіко-технологічний інститут імені Роберта Ельворта

SOCIAL GRAPH OF GLOBAL GAME JAM UKRAINE PARTICIPANTS: CONSTRUCTION AND ANALYSIS

Abstract. *This paper explores the structural evolution of the game development community in Ukraine through the lens of social network analysis (SNA). Based on data parsed from the Global Game Jam (GGJ) archives between 2016 and 2026, a non-oriented social graph was constructed. In this network, 2,742 unique nodes represent individual participants, while edges represent collaborative work on specific game projects, according to Pirker et al, 2017. The study utilizes combinatorial methods and graph theory metrics to assess connectivity, fragmentation, and resilience.*

Key findings reveal the community structure, and highlight the network's adaptability under extreme conditions, including the COVID-19 pandemic and the full-scale war. Despite power outages and security risks, the community maintained project output and even formed new clusters around social-impact themes. These results provide critical insights for the future skill development projects, identifying key influencers for knowledge transfer and proposing strategies to bridge isolated community "islands" to enhance overall national STEAM-skill integration.

Вступ. Global Game Jam (GGJ) є найбільшою у світі подією з розробки ігор, що базується на ідеї одночасного створення проєктів тисячами команд за обмежений час (48 годин) на задану тему. Україна офіційно приєдналася до руху GGJ у 2016 році. За одинадцять років ініціатива перетворилася з локального збору ентузіастів на потужну професійну спільноту. Однак, окрім творчого та інженерного аспекту, GGJ представляє унікальний об'єкт для дослідження в галузі теорії графів та комбінаторного аналізу - соціальну мережу учасників (джемерів), зв'язки в якій формуються через спільну роботу над проєктами.

Аналіз структури цієї мережі дозволяє не лише оцінити стійкість спільноти, а й виявити приховані закономірності передачі знань, ролі

«супер-конекторів» та вплив зовнішніх факторів (пандемія, повномасштабна війна) на топологію зв'язків.

Методологія збору даних та побудова графа.

Основою дослідження стали дані, отримані шляхом парсингу офіційних архівів Global Game Jam (v3.globalgamejam.org для періоду до 2023 року та globalgamejam.org з 2024 року). Процес підготовки даних включає:

- **Парсинг сторінок локацій:** вилучення списків учасників та створених ігор (Рис.1).
- **Дедуплікацію:** ідентифікацію унікальних профілів учасників, які могли брати участь у різних локаціях у різні роки.
- **Формування ребер:** зв'язок між двома учасниками (вузлами) встановлювався за умови їхньої спільної роботи над однією грою в межах одного джему.

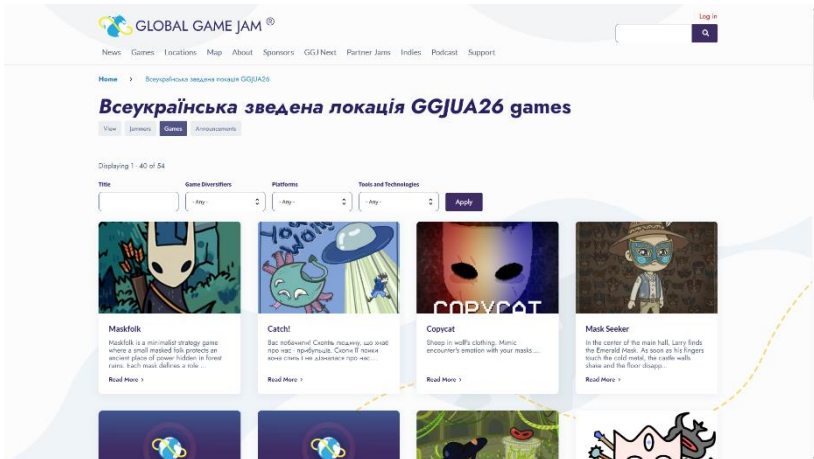


Рис.1. - Сторінка української локації Global Game Jam за 2026 рік зі списком ігор

Математично соціальну мережу джемерів можна представити як неорієнтований зважений граф $G=(V, E, W)$, де:

V - множина учасників;

E - множина зв'язків, що виникають при спільній розробці ігор;

W – ваги ребер, що відповідають кількості спільних проєктів між парою учасників за всі роки [1]

Оскільки кожна гра створюється командою, структура джему на мікрорівні являє собою набір повних підграфів (клік). Кожна команда з n учасників утворює кліку K_n . Загальний граф спільноти за роки її роботи є об'єднанням таких клік.

Комбінаторні характеристики та загальна статистика. За період існування GGJ в Україні було зафіксовано такі кількісні показники:

Загальна кількість унікальних учасників: 2742 особи.

Результативність: 2059 учасників (75%) успішно завершили та завантажили принаймні одну гру. Це свідчить про високий рівень мотивації та технічної підготовки.

Командна взаємодія: 1960 учасників працювали в командах чисельністю більше одного джемера, що підтверджує соціальну спрямованість заходу.

Продуктивність: за весь час було створено 828 ігор, при цьому середній показник становить 75 ігор на рік.

Динаміка залучення демонструє стабільне зростання: в середньому щороку до спільноти приєднується 249 нових учасників. Це вказує на постійне оновлення кадрового потенціалу галузі.

Аналіз зв'язності та топології українського сегмента.

Аналіз статистики зв'язності (Connectivity Statistics) виявив специфічну структуру української мережі. Граф складається з 392 ізольованих компонент зв'язності [2]. Велика кількість компонент при значній кількості вузлів свідчить про «острівну» структуру спільноти. (Рис.2).

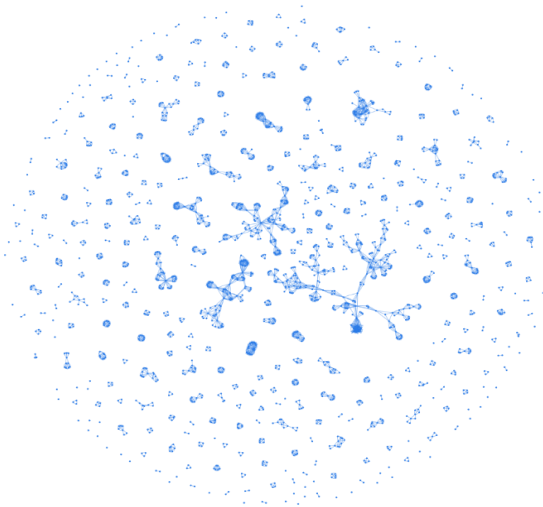


Рис.2. - Соціальний граф учасників Global Game Jam Ukraine

Найбільша зв'язна компонента (LCC) включає 154 вузли, що становить лише 7,48% від загальної кількості учасників та містить 536 ребер (11,45% від усіх зв'язків у графі).

Щільність ядра: Незважаючи на малий відносний розмір LCC, середній степінь вузла в цій компоненті становить 6.96, тоді як загальний середній степінь у графі — 4.55. Це математично підтверджує наявність «професійного ядра» — групи активних розробників, які часто змінюють

команди, беруть участь у багатьох джемах та виступають головними провідниками досвіду. (Рис.3)

Темпоральна динаміка та вплив зовнішніх факторів.

Аналіз часових рядів (2016–2026) дозволяє виділити чотири фази розвитку графа:

Фаза становлення (2016–2018): Заснування GGJ UA у Кропивницькому з подальшим розширенням на інші міста. Граф у цей період характеризується розрізненими кліками невеликого розміру.

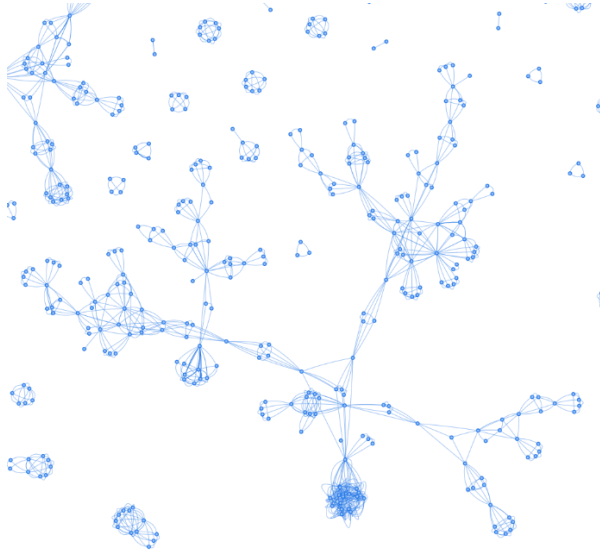


Рис.3. - Найбільший зв'язний компонент соціального графу учасників Global Game Jam Ukraine

Фаза експоненційного зростання (2019–2020): Пік активності (понад 500 учасників одночасно). Формування перших великих кластерів завдяки всеукраїнським мітапам.

Фаза онлайн-трансформації (2021–2022): Перехід у хмарні сервіси (Telegram, Discord) через пандемію. Спостерігається збільшення кількості ребер, оскільки відсутність фізичних локацій дозволила працювати у командах учасникам з різних міст України.

Воєнна фаза (2023–2025): Демонстрація «Blitz Spirit». Незважаючи на блекаути та безпекові ризики, граф почав відновлювати свою щільність. З'явилися специфічні тематичні вузли, пов'язані з проектами медіаграмотності та протидії пропаганді (наприклад, United with Ukraine Game Jam).

Висновки.

Побудований соціальний граф є інструментом для стратегічного управління спільнотою за декількома аспектами.

Освітній аспект: Виявлення «вузлів-провідників» дозволяє таргетувати освітні програми, зокрема, програми Erasmus+

Структурна оптимізація: Велика кількість ізольованих компонент (392) ставить перед організаторами завдання щодо стимулювання міжрегіональної взаємодії для об'єднання «островів» у більш цілісну мережу.

Стійкість системи: Висока щільність LCC (6.96) гарантує збереження критичних знань всередині спільноти навіть за умови значного відтоку периферійних учасників.

Математичний аналіз українського сегмента GGJ доводить, що соціальна мережа розробників ігор є стійкою саморегульованою системою, здатною до відновлення структури зв'язків навіть у екстремальних умовах.

Джерела

1. Pirker, J., Khosmood, F., & Guetl, C. (2017). Social network analysis of the global game jam network. In *Proceedings of the 12th International Conference on the Foundations of Digital Games* (pp. 10–14). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/3055116.3055117>

2. Hagberg, A. A., Schult, D. A., & Swart, P. J. (2008). Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. In G. Varoquaux, T. Vaught, & J. Millman (Eds.), *Proceedings of the 7th Python in Science Conference* (pp. 11–15). SciPy.

УДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДІВ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕНЬ МІСЦЕПОЛОЖЕННЯ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА ЗА ДАНИМИ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ

Калашник Г.А., Калашник-Рибалко М.А.

Українська державна льотна академія

IMPROVEMENT OF THE METHOD FOR INCREASING THE ACCURACY OF DETERMINING THE LOCATION OF AN AIRCRAFT USING GRAVITATIONAL FIELD DATA

Kalashnyk G.A., Kalashnyk-Rybalko M.A.

Ukrainian State Flight Academy

Abstract. The authors have presented the directions for improving the method of increasing the accuracy of aircraft location determinations using gravitational field parameters, which differ from the existing one in that in the absence of GNSS signals, the search for a solution for a correlation-extreme navigation system is carried out based on current data from the BINS, and to

increase the accuracy of navigation determinations, it is possible to jointly use a gravimeter and a gravitational gradiometer.

Глобальні навігаційні супутникові системи (ГНСС) забезпечують високі потенційні точності навігаційних визначень, глобальне покриття та безперервність навігації. Однак існує ряд ситуацій, в яких рівень сигналів ГНСС виявляється нижче порогового рівня, наприклад, в умовах навмисних перешкод, у тому числі несанкціонованої зміни потужності (аж до повного відключення) сигналів космічних апаратів. Існуючі методи та засоби навігації на основі супутникових навігаційних систем не гарантують виконання вимог надійності навігаційно-часових визначень в умовах навмисних перешкод та недоступності сигналів ГНСС. Вирішення зазначеного завдання можливе за рахунок комплексування супутникової навігаційної апаратури споживача (НАС) з автономними засобами навігації, заснованими на інших принципах, зокрема – з безплатформними інерціальними навігаційними системами, що широко використовуються в даний час (БНС). Глобальність, точність і абсолютну перешкодозахищеність коригуючої інформації можна забезпечити за рахунок вимірювання складових аномального гравітаційного поля Землі (ГПЗ), яке в цілому стабільне в часі, а його малі варіації досить точно прогнозуються. Тому удосконалення методу підвищення точності визначень місцеположення літального апарата з використанням параметрів гравітаційного поля, є важливим та актуальним науково-технічним завданням.

Основою комплексної стійкої до перешкод навігаційної системи повинна служити навігаційна апаратура споживача (НАС) ГНСС GPS та ін. і система числення шляху. Основними варіантами систем числення шляху є або інерційна навігаційна система (БНС), заснована на використанні акселерометрів та гіроскопів, або система числення на основі одометра. Для забезпечення стійкості до перешкод на додаток до цієї апаратури необхідно використовувати кореляційну систему навігації за гравітаційним полем Землі (ГПЗ) [1]. Для об'єктів, що повільно рухаються, можливе використання гравіметрів, для високоманеврених літальних апаратів (ЛА) доцільно використання градієнтметрів, які не схильні до впливу активних прискорень.

Алгоритм роботи системи навігації за гравітаційним полем глобально можна розділити на два етапи [2]: перший етап – грубий пошук розташування на карті, другий етап, який виконується після першого, полягає в уточненні траєкторії та супроводі траєкторії руху.

У першому етапі завдання навігації за ГПЗ зводиться до наступного: використовуючи набір вимірів, що описуються виразами:

$$X^{HC} = \left[x_1^{HC} + x_2^{HC} + x_3^{HC} \right]$$

де $X^{HC} = [x_1^{HC} + x_2^{HC} + x_3^{HC}]$ – положення об'єкта навігації за даними навігаційної системи 1, 2, 3;

$X^0 = [x_1^0 + x_2^0 + x_3^0]$ – справжнє положення об'єкта навігації;

$X^{\delta HC} = [x_1^{\delta HC} + x_2^{\delta HC} + x_3^{\delta HC}]$ – похибка визначення положення об'єкта навігації за даними навігаційної системи.

$$Y^{вимір} = f_k(X^0) + Y^{\delta справ}$$

де $Y^{вимір}$ – вимірне значення параметра ГПЗ на виході вимірювача;

$f_k(X^0)$ – значення параметра ГПЗ в точці істинного положення об'єкта навігації;

$Y^{\delta справ}$ – похибка вимірювання, що визначається внутрішнім пристроєм датчика та особливостями вимірювання положення об'єкта навігації за даними навігаційної системи.

У процесі руху, по задалегідь сформованій карті параметрів ГПЗ вздовж маршруту руху, споживач формує очікувані значення параметра ГПЗ в точці поля, що вимагається:

$$Y^k = f_k(X^{HC}) + Y^{\delta k}$$

$f_k(X^{HC})$ – карта параметрів ГПЗ;

$Y^{\delta k}$ – помилка картографування.

Тепер необхідно мінімізувати помилку позиціонування за даними навігаційної системи за допомогою зовнішнього джерела інформації, яким служить гравітаційне поле.

Іншими словами, вирішення задачі навігації зводиться до мінімізації функціоналів, що характеризують близькість вимірних та обчислених за картою значень параметра ГПЗ [1]:

1) інтегральна квадратична різниця:

$$F_1 = \left(\sum_{i=1}^n (Y^{вимір} - f_x(X(t))^2) \right) \quad (1)$$

2) інтегральна абсолютна різниця:

$$F_2 = \left(\sum_{i=1}^n \left| Y^{вимір} - f_x(X(t))^2 \right| \right) \quad (2)$$

3) взаємний кореляційний момент:

$$F_3 = \left(\sum_{i=1}^n \left| Y^{вимір} \cdot f_x(X(t)) \right| \right) \quad (3)$$

де $X(t) = X|_{t=0} + V \cdot t$ – наближене визначення траєкторії руху об'єкта навігації;

F_1 – інтегральна квадратична різниця;

F_2 – інтегральна абсолютна різницю;

F_3 – взаємний кореляційний момент.

У випадку ці критерії є багатоекстремальними і рішення зводиться до непростой задачі пошуку глобального екстремуму [2]. При виконанні певних умов, зокрема, збільшенні інтервалу корекції та точності вимірювачів і карти, глобальний екстремум, по-перше, розташовується «в околиці» істинного місця, а по-друге, його значення суттєво перевершує за рівнем локальні «хибні» екстремуми [3]. У цій ситуації пошук екстремуму полегшується і вдається забезпечити необхідну точність визначення координат [4]. У цій постановці завдання навігації поділяється на два етапи [1].

Підготовчий етап та етап навігації:

1. Підготовчий етап, у якому формується розкладання карти прискорення вільного падіння (ПВП) за допомогою ортогонального базису функцій F та на основі цього розкладання формується регресійна модель;

2. Етап навігації, на якому обчислюються коефіцієнти розкладання бортових вимірів прискорення вільного падіння за допомогою того ж ортогонального базису F і визначається місце розташування споживача за регресійною моделлю, розроблена на підготовчому етапі.

Таким чином, алгоритми пошуку розташування на основі виразів (1–3) мають суттєвий недолік, який полягає у малій оперативності, внаслідок необхідності набору великої кількості вимірів вздовж тривалого інтервалу руху та в невисокій точності при малих наборах вимірювань. Крім того, за наявності великої апріорної невизначеності розташування суттєво зростають обчислювальні витрати, пов'язані з пошук реалізації поля на навігаційній карті.

Другий етап пошуку – уточнення розташування реалізується на основі алгоритмів Калманівської фільтрації. Дані алгоритми набули широкого поширення у завданнях навігації рухомих об'єктів [5].

Переваги безпошукових алгоритмів у тому, що дозволяє отримати як оптимальну оцінку місцезнаходження, а й оцінити точність цієї оцінки. Недоліками безпошукових алгоритмів є такі проблеми: 1) завдання калманівської фільтрації має рішення лише у разі лінійного характеру завдання; 2) спостерігається розбіжність результатів між істиною траєкторією і траєкторією, отриманою за результатами фільтрації, сильно мінливих полях; 3) неможливість навігації, відсутність початкових даних про місцезнаходження.

Для усунення першого недоліку в задачі з використанням алгоритмів фільтрації використовуються різні апроксимації для зняття нелінійного характеру завдання. Для вирішення другого недоліку було запропоновано модифікації фільтра Калмана. Незважаючи на використання різних варіантів апроксимації та різних модифікацій фільтра Калмана, першу проблему безпошукових алгоритмів не було вирішено в повному обсязі. Ці алгоритми не завжди забезпечують ефективну роботу.

Сформулюємо завдання навігації за гравіметричним полем Землі наступним чином. Нехай, як вихідні дані виступає карта параметрів ГПЗ та вимірювання за маршрутом руху.

Масив значень карти навігаційного параметра зазвичай подається у вигляді регулярної сітки (таблиці) з рівномірним кроком значень по широті та довготі:

$$Y_{\varphi, \lambda}^{карт} = \begin{Bmatrix} y_{\varphi_1 \lambda_1}^{карт} & y_{\varphi_1 \lambda_2}^{карт} & \cdots & y_{\varphi_1 \lambda_n}^{карт} \\ y_{\varphi_2 \lambda_1}^{карт} & y_{\varphi_2 \lambda_2}^{карт} & \cdots & y_{\varphi_2 \lambda_n}^{карт} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{\varphi_n \lambda_1}^{карт} & y_{\varphi_n \lambda_2}^{карт} & \cdots & y_{\varphi_n \lambda_n}^{карт} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

де $y_{\varphi_i \lambda_j}^{карт}$ – значення параметра ГПЗ у точці з широтою φ_i та довготою

λ_j , $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Для зручності в навігаційного параметра будемо використовувати прискорення вільного падіння. Нехай існує карта, значення гравітаційного поля у вузлах карти задані з похибками, що є центрованим білим шумом з середньоквадратичним відхиленням (СКВ)

$\sigma_{карт}$.

Розглянемо випадок навігації наземного об'єкта за маршрутом L . У такому разі карту параметрів (4) можна уявити, як зміну навігаційного параметра (прискорення вільного падіння) уздовж маршруту навігації:

$$\Delta G^{карт} = \{g_1^{карт}, g_2^{карт}, \dots, g_i^{карт}, \dots, g_{grid}^{карт}\}$$

де $g_i^{карт}$ – значення збільшення прискорення вільного падіння за маршрутом у вузлах рівномірної сітки з кроком $\Delta L_{grid}^{карт}$. $i = 1, \dots, N_{grid}$.

$$N_{grid} = L / \Delta L_{grid} + 1 \text{ – кількість вузлів карти.}$$

Значення поля у вузлах карти $g_i^{карт}$ і задані з помилками, що є центрованим білим шумом з СКВ $\sigma_{карт}$.

Рухомий об'єкт рухається маршрутом з постійною швидкістю V з початкової точки $X(t_0)$, координати якої не відомі:

$$X(t_i) = X(t_0) + V(t_i - t_0),$$

де $X(t_i)$ – координати рухомого об'єкта на момент часу t_i .

У моменти часу t_i вимірюються параметри поля (збільшення прискорення вільного падіння) $g_i^{\text{вимір}}$ з яких формується набір значень вимірюваного параметра $G_i^{\text{вимір}}$ вздовж маршруту руху, який можна представити в наступному вигляді:

$$G_I^{\text{вимір}} = \{g_1^{\text{вимір}}, g_2^{\text{вимір}}, \dots, g_i^{\text{вимір}}\}$$

де I – кількість вимірювань на інтервалі корекції ΔL .

$g_i^{\text{вимір}} = [g(X_i) + n^{\text{вимір}}(t_i) + \partial g]$ – поточні вимірювання параметра ГПЗ;

$g(X_i)$ – дійсне значення прискорення вільного падіння в точці з координатою $X(t_i)$;

$n^{\text{вимір}}(t_i)$ – білий гаусівський шум з нульовим математичним очікуванням та дисперсією $\sigma_{\text{вимір}}^2$;

∂g – систематична складова вимірювань із дисперсією $\sigma_{\text{вимір}}^2$;

$g_0^{\text{вимір}} = [g(X_0) + n^{\text{вимір}}(t_0) + \partial g]$ – вимірювання у початковий момент часу.

Карти гравітаційного поля Землі, за якими може здійснюватись навігація, можуть створюватися за низкою інформаційних прошарків: 1) карта-прошарок аномалій прискорення вільного падіння (ПВП); 2) карта-прошарок вертикальних гравітаційних градієнтів; 3) карта-прошарок горизонтальних гравітаційних градієнтів; 4) карта-прошарок ухилення вертикальної лінії; 5) карта-прошарок різниці гравітаційного потенціалу.

Джерелами вихідних даних для створення цифрових карт різноманітних трансформант гравітаційного поля Землі можуть бути як дані, отримані з безпосередніх вимірювань, так і дані, отримувані при використанні існуючих цифрових моделей гравітаційного поля Землі.

Висновки. Огляд поточного розвитку алгоритмів навігації за даними ГПЗ показав, що на даний момент необхідна розробка та удосконалення пошукових алгоритмів з метою зменшення обчислювальних витрат у бортовій апаратурі споживача. Представлені шляхи удосконалення методу

підвищення точності визначень місцеположення літального апарата з використанням параметрів гравітаційного поля які відрізняються від існуючого тим, що за відсутності сигналів ГНСС, пошук рішення кореляційно екстремальної системи навігації (КЕНС) проводиться на основі поточних даних від БІНС, а для підвищення точності навігаційних визначень можливе спільне використання гравіметра, гравітаційного градієнтометра. В подальшому для дослідження точнісних характеристик, а також для обґрунтування вимог до складових частин комплексованої завадостійкої апаратури під час руху маршрутами з різною аномальністю ГПЗ необхідна розробка імітаційної моделі такої системи, а також необхідні дослідження, спрямовані на підвищення точності навігаційних гравітаційних карт для КЕНС по ГПЗ на основі вимірювань різниці гравітаційних потенціалів уздовж маршруту навігації.

Література

1. Hussain, M., Chen, D., Cheng, A., Wei, H., Stanley, D. (2013). Change detection from remotely sensed images: From pixel-based to object-based approaches. *ISPRS J. Photogrammetry and Remote Sensing*. V. 80. P. 91–106.

2. Jarraya, I., Al-Batati, A., Bilal Kadri, M., Abdelkader, M., Ammar, A., Boulila, W. & Anis Koubaa, A. (2025). Gnss-denied unmanned aerial vehicle navigation: analyzing computational complexity, sensor fusion, and localization methodologies. *Satellite Navigation*. 6:9. <https://doi.org/10.1186/s43020-025-00162-z>

3. Kalashnyk, G.A., Bielyi, S.V. (2025). *Polipshennya tochnisnykh kharakterystyk inertsiyal'noyi navihatsiynoyi systemy bezpilotnoho lital'noho aparatu v skladnykh umovakh* [Improving the accuracy characteristics of the inertial navigation system of an unmanned aerial vehicle in difficult conditions]. *Nauka i tekhnika s'ohodni*, No. 13(54), S. 2139-2152. [https://doi.org/10.52058/2786-6025-2025-13\(54\)-2139-2152](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2025-13(54)-2139-2152). [In Ukrainian].

4. Kalashnyk, G.A., Bielyi, S.V. (2025). *Korektsiya navihatsiynoyi informatsiyi system lital'nykh aparativ v umovakh anomal'nykh zburen' na bazi prohnzuyuchykh modeley*. [Correction of navigation information of aircraft systems under conditions of anomalous disturbances based on predictive models]. *Nauka i tekhnika s'ohodni*, No. 10 (51), S. 1585-1598. [https://doi.org/10.52058/2786-6025-2025-10\(51\)-1585-1598](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2025-10(51)-1585-1598) [In Ukrainian].

5. Kalashnyk, G.A., Bielyi, S.V. (2025). *Udoskonalennya alhorytmiv korektsiyi inertsiyal'noyi navihatsiynoyi systemy lital'noho aparatu v umovakh znyknennya syhnalu suputnykovoyi navihatsiynoyi systemy. Natsionalni interesy Ukrainy*. [Improvement of algorithms for correction of the inertial navigation system of an aircraft in conditions of disappearance of the signal of the satellite navigation system]. No. 11(16). S.261-272. [https://doi.org/10.52058/3041-1793-2025-11\(16\)-261-272](https://doi.org/10.52058/3041-1793-2025-11(16)-261-272) [In Ukrainian].

ДОСЛІДЖЕННЯ КВАНТОВОГО ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ ДОБЕШІ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ МЕРЕЖЕВИХ АТАК

Ян Карпенко, Валерій Дубровін

Національний університет «Запорізька політехніка»

RESEARCH ON QUANTUM DAUBECHIES WAVELET TRANSFORM FOR DETECT NETWORK ATTACKS

Yan Karpenko, Valeriy Dudrovin

National University «Zaporizhzhia Polytechnic»

Abstract. The report presents a study of information technology for network attack detection based on the Quantum Daubechies Wavelet Transform. The use of the "db10" wavelet basis is substantiated through the analysis of frequency characteristics, providing high resolution in the time-frequency domain. A method for optimal decomposition of non-stationary traffic based on the minimum wavelet entropy criterion is proposed. The advantages of quantum amplitude encoding for processing large data sets are described. The results confirm the effectiveness of the method (70–94% anomaly detection) and its potential for protecting critical information infrastructure.

Математичні засади вейвлет-аналізу. Вейвлет-перетворення дозволяє розглядати дані не тільки в частотній області, але і в часовій, що значно спрощує локалізацію аномалій. Для дослідження мережевого трафіку з урахуванням його хаотичного характеру використовуються вейвлети сімейства Добеші, які характеризуються великою кількістю зникаючих моментів за мінімального розміру носія. Вейвлет-перетворення може бути виражено наступним рівнянням:

$$F(a, b) = \int f(x) \psi^*_{(a,b)}(x) dx$$

де ψ^* – символ комплексної пов'язаності, а ψ – материнський вейвлет. Вейвлети Добеші є ортогональними, мають компактний носій та забезпечують принципову можливість реконструкції сигналів[2].

Квантове кодування та фільтрація. Ключовим етапом технології є відображення вектора активності трафіку у квантовий стан. Зашумлений сигнал у загальному вигляді описується моделлю:

$$s(n) = f(n) + \sigma \cdot e(n)$$

де $f(n)$ – корисний сигнал, σ – рівень шуму, а $e(n)$ – Гауссів білий шум. При вейвлет-перетворенні сигнал розкладається на апроксимуючі коефіцієнти (згладжений сигнал) та деталізуючі коефіцієнти (коливання) [2] [3].

Квантове амплітудне кодування дозволяє записати інформацію про мережеву активність у стани кубітів, де деталізуючі коефіцієнти з високим вмістом шумових компонентів піддаються пороговій обробці[3].

Класифікація областей аналізу та вбудовування. У сучасних системах захисту даних вейвлет-перетворення (ВП) вважається

найперспективнішим методом завдяки високій стійкості до навмисних атак та викривлень у каналах зв'язку. Ефективність застосування ВП та дискретного косинусного перетворення (ДКП) зумовлена тим, що вони добре моделюють процес обробки інформації, відділяючи суттєві деталі від другорядних. При реалізації квантового алгоритму важливо враховувати розподіл енергії сигналу: високочастотні субсмуги характеризуються великим шумом обробки, а низькочастотні — високим шумом самого зображення (або трафіку), тому найбільш стабільними для локалізації аномалій є середньочастотні смуги[5].

Визначення оптимального вейвлет-базису. Однією з ключових проблем вейвлет-аналізу є обґрунтований вибір материнського вейвлета, оскільки часто цей процес носить суб'єктивний характер і спирається лише на досвід дослідників[10]. Для вирішення цього завдання запропоновано використовувати вейвлет-частотну характеристику (ВЧХ), яка визначається як чутливість вейвлет-коефіцієнтів розкладання від частоти сигналу[6]. Оптимальним вейвлет-базисом W_{opt} вважається такий, що мінімізує сукупність параметрів: ширину смуги пропускання головної пелюстки ВЧХ (L_p), площу бічних пелюсток (S_b) та близькість центральної частоти до частоти досліджуваного сигналу (F_{cs}):

$$W_{opt} = \min(L_p^H, S_b^H, F_{cs}^H).$$

Аналіз сімейств вейвлетів за цією методикою показав, що у сімействі Добеші кращим базисом є «db10», оскільки зі збільшенням порядку вейвлета в його сімействі зменшується ширина смуги пропускання головної пелюстки та площа, зайнята бічними пелюстками, що забезпечує прецизійну фільтрацію сигналів[1].

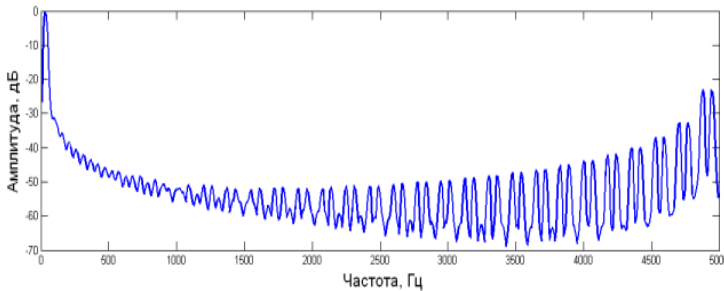


Рис.1 – Вейвлет-частотна характеристика вейвлет-базису сімейства Добеші високого порядку, що демонструє прецизійну чутливість до частотних компонент мережевого трафіку

Ентропійний критерій декомпозиції сигналу. При аналізі нестационарного мережевого трафіку критично важливо визначити оптимальний рівень розкладу сигналу для розділення його на незалежні

складові. Для декомпозиції сигналу складної форми на легітимний трафік та аномалії запропоновано метод, заснований на мінімізації сумарної вейвлет-ентропії. Вейвлет-ентропія Шеннона для сигналу s визначається як:

$$H_w(s) = \sum_i s_i^2 \log_2(s_i^2)$$

«Переломна точка» на кривій розподілу сумарної вейвлет-ентропії відображає найбільш нестійкий стан системи, в якому можливе найбільш чітке відокремлення компонент сигналу.

Виділення аномалій виконується на рівні декомпозиції з мінімальним значенням ентропії, що дозволяє системі перейти в абсолютно стійкий стан і точно зафіксувати часові координати початку атаки[1] [7].

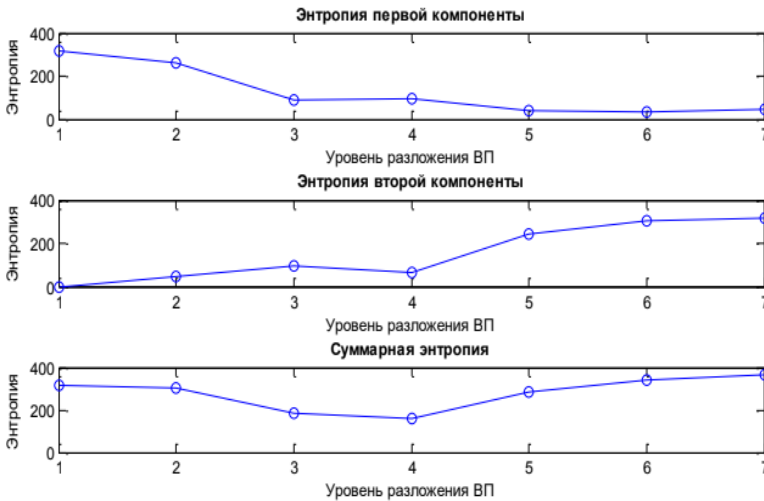


Рис.2 – Розподіл значень вейвлет-ентропії на різних рівнях декомпозиції сигналу: пошук мінімуму сумарної ентропії для локалізації мережевого вторгнення

Попередня обробка та квантове кодування. Процес обробки вхідних даних починається з вейвлет-трешолдінгу (порогової обробки), що полягає у видаленні високочастотних компонентів та дозволяє очистити сигнал від шуму без суттєвої зміни його форми[9]. Застосування амплітудного кодування (Amplitude Encoding) дозволяє представити масиви мережевих даних Big Data у квантовому стані суперпозиції:

$$|\psi_x\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} c_i |i\rangle$$

де c_i – амплітуди, що несуть інформацію про інтенсивність трафіку. Згідно з аксіомами квантової механіки, нормалізація вектора стану ($\sum |c_i|^2 = 1$) є обов'язковою умовою, яка забезпечує збереження енергії квантового стану та унітарність всього процесу обробки інформації.

Для визначення оптимального вейвлет-базису проведено дослідження сімейства Добеши. Досліджувалися наступні параметри вейвлет-частотної характеристики: ширина смуги пропускання головної пелюстки, площа бічних пелюсток, близькість центральної частини головної пелюстки до частоти досліджуваного сигналу[6]. Результати аналізу сімейства приведені в табл. 1. Вейвлет-частотні характеристики сімейства представлені на рисунку 3.

Таблиця 1 – Результати аналізу сімейства Добеши

Вейвлет	L_p , Гц	$S_b, * 10^5$ Гц	F_{cs} , Гц
1	2	3	4
db1	23	2.56	8
db2	21	2.51	2
db3	20	2.47	3
db4	19	2.49	0
db5	19	2.42	2
db6	19	2.38	0
db7	18	2.35	0
db8	18	2.38	1
db9	18	2.14	0
db10	18	2.02	0

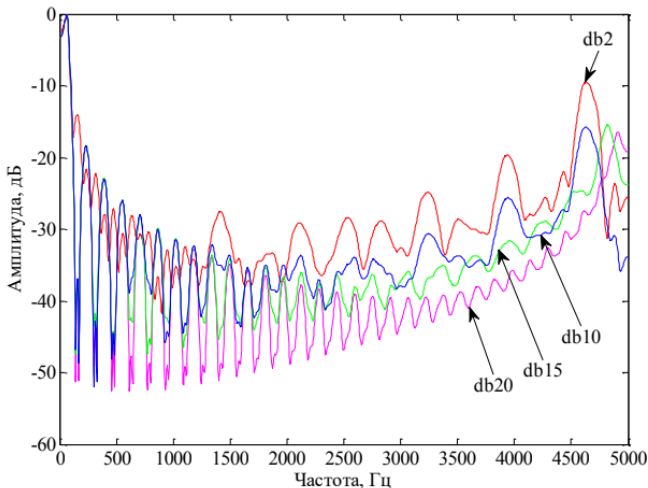


Рис. 4 – ВЧХ вейвлетів сім'я Добеши

Вейвлет «Добеші 10» можна називати найкращім у рамках порівняння сімейства Добеші від «db-1» до «db-10». Аналізуючи ВЧХ вейвлет-сімейств, можна зробити висновок, що зі збільшенням порядку вейвлета і його сімействі зменшується смуга пропускання головної пелюстки і площа, зайнята бічними пелюстками. В середньому смуга пропускання складала близько 18 Гц [1].

Висновок. У результаті проведеного дослідження розроблено та науково обґрунтовано інформаційну технологію виявлення мережесих атак, що базується на поєднанні апарату вейвлет-перетворення Добеші та принципів квантових обчислень[1],[8]. Застосування частотно-часової локалізації дозволило вирішити проблему ідентифікації аномалій у нестаціонарних потоках даних, які традиційні методи моніторингу часто пропускають через високу дисперсію фонових трафіку.

Основним науковим результатом є вдосконалення методу вибору оптимального вейвлет-базису на основі аналізу вейвлет-частотних характеристик (ВЧХ). Експериментально доведено, що вейвлет «db10» забезпечує найвищу точність фільтрації завдяки мінімальній ширині смуги пропускання (18 Гц) та низькому рівню бічних пелюсток, що дозволяє прецизійно виділяти сингулярності, характерні для початку кібератак. Використання ентропійного критерію Шеннона для визначення «переломної точки» декомпозиції дозволило автоматизувати процес локалізації мережевого вторгнення, мінімізуючи сумарну невизначеність системи.

Література

1. Твердохліб Ю. В. (2018). Методи та інформаційна технологія комплексного оцінювання параметрів вейвлет-перетворення нестаціонарних сигналів. Дисертація канд. техн. наук. Запоріжжя: ЗНТУ.
2. Чемерис К. М., Дейнега Л. Ю. (2022). Застосування методу вейвлет-аналізу для виявлення атак в мережах. Наука і техніка ПС ЗСУ, № 1(46), 99-107.
3. Петрик Б. В., Дубровін В. І. (2021). Виявлення атак типу DoS в мережевому трафіку за допомогою вейвлет-перетворення. Прикладні питання мат. моделювання, Т. 4, № 1, 186-196.
4. Калюга Б., Задерей Н. (2018). «Застосування вейвлет-перетворення в сучасній науці та техніці». Тези доповіді. (Національний технічний університет України «КПІ імені Ігоря Сікорського»).
5. Астраханцев А. А., Вовк О. О. (2015). «Аналіз ефективності застосування вейвлет-перетворення в стеганографічних системах передавання даних». (Харківський національний університет радіоелектроніки).
6. Комп'ютерна програма «Аналіз частотних складових вейвлет-базису»: Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір No 60630 /

Ю.В. Твердохліб, В.І. Дубровін. – державна служба інтелектуальної власності України. – Дата реєстрації: 14.07.2015.

7. Kwon D., Ko K., Vannucci M., Reddy A.N., Kim S. Wavelet methods for the detection of anomalies and their application to network traffic analysis. Quality and Reliability engineering International. 2006. Vol. 22. Is. 8. P. 953-969. <https://doi.org/10.1002/qre.781>

8. Лукічов В. В. Методи та засоби стеганографічного захисту інформації в комп'ютерних системах і мережах на основі вейвлетперетворень [Текст] : автореф. дис... канд. техн. наук : 05.13.21 / НАН України – К., 2010

9. Fijany A., Williams C. P. (1998). Quantum Wavelet Transforms: Fast Algorithms and Complete Circuits. In: Quantum Computing and Quantum Communications. Springer.

10. MathWorks Development Team (2026). Wavelet Toolbox User's Guide. MATLAB Documentation.

ПРОГРАМНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗВОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ ЯК ІНСТРУМЕНТ АНАЛІЗУ ЇХ ПОВЕДІНКИ

Дмитро Картамишев

Донбаська державна машинобудівна академія

SOFTWARE MODELING OF DYNAMIC FEEDBACK SYSTEMS AS A TOOL FOR ANALYZING THEIR BEHAVIOR

Abstract. The paper presents a structured approach to software-based modeling of closed-loop dynamic systems using discrete-time simulation. A second-order mathematical model is implemented in the Go programming language with a proportional-integral (PI) controller. The study examines transient behavior, regulation error dynamics, and control signal characteristics as functions of system parameters –damping ratio ζ and natural frequency ω . The proposed modular architecture enables systematic parametric analysis and supports extension to nonlinear and multi-component systems. Results confirm the adequacy of the model and demonstrate the effectiveness of discrete simulation as a tool for control system analysis.

Keywords: dynamic systems, feedback control, discrete-time simulation, second-order system, PI controller, Go programming language, transient response.

Сучасні тенденції розвитку інженерних та інформаційних систем зумовлюють зростання інтересу до дослідження складних динамічних процесів, що характеризуються нелінійною поведінкою та наявністю зворотних зв'язків. Такі системи широко застосовуються в

автоматизованих системах керування, робототехніці, енергетиці та промислових технологічних процесах [1–4]. Їхньою визначальною особливістю є те, що вихідні параметри системи беруть участь у формуванні керуючих сигналів, утворюючи замкнений контур взаємодії між об'єктом керування та регулятором.

Наявність зворотного зв'язку дозволяє забезпечити стабілізацію режимів роботи, підвищити точність і адаптивність системи до змін зовнішніх умов. Водночас це суттєво ускладнює аналіз її поведінки: навіть незначні варіації параметрів можуть спричинити істотні якісні зміни динаміки процесів – зокрема, втрату стійкості або виникнення небажаних коливальних режимів. У таких умовах класичні аналітичні методи – частотний аналіз, метод кореневого годографа – часто виявляються недостатніми, особливо у випадку нелінійних або багатокomпонентних систем.

У зв'язку з цим значного поширення набувають методи комп'ютерного моделювання [3], які дозволяють досліджувати поведінку динамічних систем шляхом чисельного відтворення їх роботи [10]. Застосування програмних засобів дає можливість аналізувати систему в різних режимах функціонування, варіювати її параметри та оцінювати вплив зовнішніх збурень без проведення складних і ресурсомістких фізичних експериментів. Це особливо важливо для об'єктів, натурне дослідження яких є технічно обмеженим або небезпечним.

Динамічні системи із зворотним зв'язком описуються математичними моделями, що встановлюють залежність між вектором стану системи, вхідними та вихідними сигналами. У загальному випадку такі моделі представляються у вигляді систем диференціальних або різницевих рівнянь [1], що відображають еволюцію параметрів у часі. Ключовими якісними характеристиками системи при цьому є стійкість, швидкодія, точність у сталому режимі та чутливість до зовнішніх збурень.

Особливої уваги потребують системи з нелінійними залежностями між параметрами, поведінка яких може бути складною та важко передбачуваною засобами лінійної теорії. У таких випадках програмне моделювання виступає не лише допоміжним, а й основним інструментом дослідження [3], що дозволяє виявляти закономірності функціонування та якісно оцінювати характер динамічних процесів.

Таким чином, застосування програмного моделювання для аналізу динамічних систем із зворотним зв'язком є актуальним науковим напрямом, що поєднує математичні методи, алгоритмічні підходи та сучасні обчислювальні технології. Реалізація цього підходу базується на дискретизації часу та ітераційному чисельному розв'язанні рівнянь стану [3], що дозволяє відтворювати математичні моделі у вигляді програмних алгоритмів та проводити відтворювані параметричні експерименти засобами сучасних обчислювальних платформ.

Наукову новизну роботи становить реалізація модульної архітектури програмного середовища для дискретного моделювання замкнених

динамічних систем мовою Go [5], яка забезпечує незалежність компонентів моделі та можливість систематичного параметричного аналізу, що відрізняє запропонований підхід від відомих інструментальних рішень.

Метою роботи є розробка та верифікація програмної моделі динамічної системи другого порядку із PI-регулятором на основі дискретного моделювання, а також аналіз якісних показників перехідних процесів залежно від параметрів системи.

У загальному випадку процес моделювання полягає у послідовному обчисленні стану системи на кожному кроці дискретного часу. На кожній ітерації визначається поточний вихід об'єкта, обчислюється похибка регулювання відносно заданого значення та формується керуючий сигнал, що впливає на подальший стан системи. Такий підхід дозволяє відтворити замкнений контур керування та дослідити його динамічні властивості в перехідних і усталених режимах.

Типовий цикл моделювання може бути представлений у вигляді ітераційного алгоритму:

```
for t := 0.0; t < T; t += dt {  
    y := system(x)  
    e := r - y  
    u := controller(e)  
    x = update(x, u)  
}
```

Наведений алгоритм відображає взаємодію між трьома ключовими компонентами замкненої системи: об'єктом керування, регулятором та блоком оновлення стану. На кожному кроці обчислюється новий вектор стану системи, що дозволяє отримати її часову еволюцію та кількісно оцінити характеристики перехідних процесів.

Для більш детального дослідження динаміки було реалізовано модель другого порядку [1], що враховує інерційні властивості об'єкта та описується рівнянням:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \omega_n^2u$$

де x – вихідна координата, ζ – коефіцієнт демпфування, ω_n – власна кутова частота, u – керуючий вплив. Програмна реалізація цієї моделі мовою Go [5, 6] має вигляд:

```
type SecondOrderSystem struct {  
    X      float64  
    V      float64  
    Omega float64  
    Zeta   float64  
}  
  
func (s *SecondOrderSystem) Output() float64 {  
    return s.X  
}
```

```

func (s *SecondOrderSystem) Update(u float64, dt
float64) {
    a := s.Omega*s.Omega*u -
        2*s.Zeta*s.Omega*s.V -
        s.Omega*s.Omega*s.X
    s.V += a * dt
    s.X += s.V * dt
}

```

У наведеній структурі поле X відповідає вихідному сигналу системи, V – першій похідній (швидкості його зміни), Ω – власній частоті ω_n , а $Zeta$ – коефіцієнту демпфування ζ . Такий модульний підхід [4] дозволяє чітко відокремити математичну модель об'єкта від алгоритму регулятора, що суттєво спрощує параметричні дослідження та подальшу модифікацію моделі.

Ключовим параметром дискретного моделювання є крок інтегрування dt [3], що визначає точність чисельного відтворення динаміки системи. Надмірно великий крок призводить до втрати точності та можливої нестійкості чисельної схеми, тоді як надмірно малий – до невіправданого зростання обчислювальних витрат. Вибір dt здійснюється відповідно до умови $dt \ll T_{min}$, де T_{min} – мінімальна характерна часова стала досліджуваної системи, з урахуванням швидкості зміни сигналів та наявності високочастотних компонент у відповіді.

Важливим аспектом є забезпечення узгодженості між усіма елементами моделі. Оскільки об'єкт керування та регулятор функціонують у межах єдиного дискретного циклу, їх взаємодія має бути синхронізованою [3, 4]. Це дозволяє коректно відтворювати вплив керуючих сигналів на систему та уникати накопичення чисельних похибок у процесі обчислень.

З точки зору програмної реалізації, доцільним є застосування модульного підходу [4], при якому кожен елемент системи реалізується як окремий незалежний компонент. Така архітектура дозволяє розділити функціональність між різними частинами програми, що суттєво спрощує розробку, тестування та подальшу модифікацію моделі – зокрема, модель об'єкта керування може змінюватись незалежно від алгоритму регулятора. Крім того, модульна організація забезпечує масштабованість системи та можливість повторного використання компонентів у різних задачах [4], що особливо важливо при дослідженні складних багатокomпонентних систем.

Поєднання дискретного моделювання та модульної програмної реалізації з використанням мови Go [5, 6] створює ефективний інструмент для дослідження динамічних систем із зворотним зв'язком. Такий підхід забезпечує гнучкість у варіюванні параметрів та умов моделювання, що є необхідним для проведення відтворюваних чисельних експериментів та аналізу отриманих результатів.

Моделювання проводилось при таких параметрах об'єкта та регулятора: власна кутова частота $\omega_n = 4,0$ рад/с, коефіцієнт демпфування

$\zeta = 0,35$, коефіцієнти PI-регулятора $K_p = 8,0$ та $K_i = 3,0$, крок інтегрування $dt = 0,001$ с, загальний час моделювання $T = 5$ с, задане значення вихідного сигналу $r = 1,0$. Для запобігання насиченню інтегратора застосовано обмеження інтегральної складової у діапазоні $[-5; 5]$.

Результатом виконання програмного моделювання є формування часових залежностей основних параметрів системи: вихідного сигналу, похибки регулювання, керуючого впливу та внутрішніх змінних стану [3]. Для наочного представлення та аналізу цих залежностей застосовується графічна візуалізація [7, 8], яка дозволяє швидко виявити характерні особливості перехідних процесів та сформулювати обґрунтовані висновки. Це особливо важливо при дослідженні складних динамічних процесів [3, 9], де числові дані без графічного представлення є значно менш інформативними.

Аналіз моделювання показує, що система демонструє виражений перехідний процес, характерний для недодемпфованих систем другого порядку при $\zeta < 1$ [1, 2]. На початковому етапі спостерігається швидке зростання вихідного сигналу з перерегулюванням приблизно 30%, після чого система переходить у режим затухаючих коливань зі зменшуваною амплітудою. Зменшення амплітуди коливань у часі свідчить про стійкість замкненої системи та коректний вибір параметрів моделі.

На рис. 1 представлено часову залежність вихідного сигналу системи. Після досягнення максимального значення сигнал поступово зменшується та переходить у режим затухаючих коливань, що підтверджує працездатність запропонованої моделі.

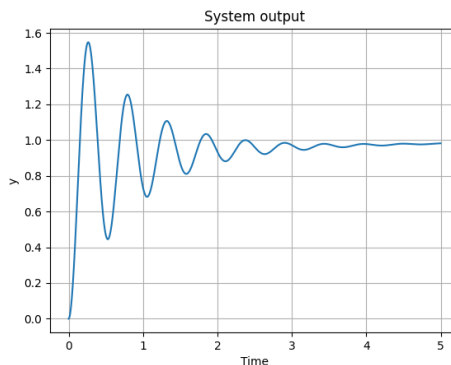


Рисунок 1 – Часова залежність вихідного сигналу системи

На рис. 2 наведено часову залежність похибки регулювання. На початку процесу похибка має максимальне значення, у міру зростання вихідного сигналу зменшується, а після виникнення перерегулювання змінює знак – така поведінка є типовою для систем із зворотним зв'язком

[3], у яких через інерційність об'єкта можливий перехід вихідної координати через задане значення. Подальше затухання коливань похибки та її наближення до нуля свідчать про ефективність використаного алгоритму керування та правильність вибору його параметрів.

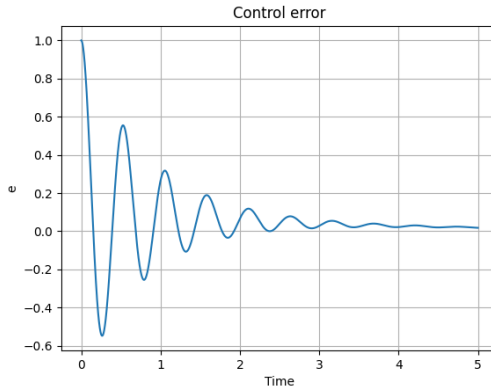


Рисунок 2 – Часова залежність похибки регулювання

На рис. 3 представлено часову залежність керуючого сигналу. На початковому етапі регулятор формує інтенсивний керуючий вплив у відповідь на значну початкову похибку; надалі, зі зміною знаку похибки, сигнал набуває коливального характеру з поступово зменшуваною амплітудою. Стабілізація керуючого впливу підтверджує коректність вибраної структури ПІ-регулятора та відсутність переходу системи в нестійкий режим.

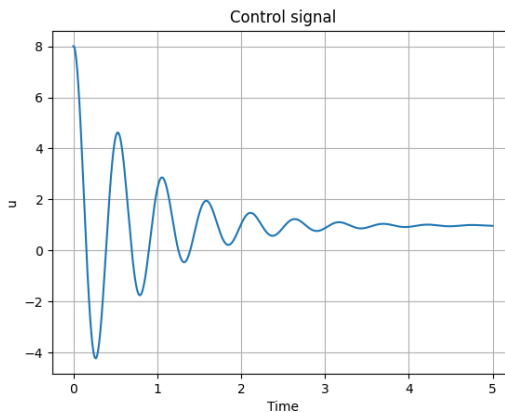


Рисунок 3 – Часова залежність керуючого сигналу

Порівняльний аналіз трьох часових залежностей демонструє узгоджений характер роботи замкненої системи в цілому. Вихідний сигнал відображає перехідний процес із перерегулюванням, похибка регулювання змінює знак і прямує до нуля, а керуючий сигнал забезпечує компенсацію відхилення без втрати стійкості. Отримані результати узгоджуються з відомими підходами до моделювання динамічних систем і підтверджують адекватність використаної моделі [9, 10], а також дозволяють наочно дослідити вплив параметрів ζ , ω_n , K_p та K_i на поведінку системи із зворотним зв'язком.

Висновки. Проведене дослідження підтверджує доцільність застосування програмного моделювання як ефективного інструменту аналізу динамічних систем із зворотним зв'язком [3, 4]. Запропонований підхід, заснований на дискретному представленні часу та ітераційному обчисленні вектора стану, дозволяє відтворювати складні динамічні процеси та досліджувати їх поведінку в різних режимах функціонування. Гнучкість програмної реалізації забезпечує відтворюваність результатів і можливість систематичного аналізу впливу окремих параметрів на стійкість, швидкодію та точність системи.

Перспективним напрямом подальших досліджень є розширення моделей шляхом урахування випадкових збурень, нелінійних ефектів та багатокомпонентної структури систем, а також інтеграція програмних моделей із методами машинного навчання для побудови адаптивних систем підтримки прийняття рішень.

Література

1. Ogata, K. (2010). *Modern control engineering* (5th ed.). Prentice Hall.
2. Åström, K. J., & Hägglund, T. (1995). *PID controllers: Theory, design, and tuning* (2nd ed.). ISA.
3. Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (2015). *Feedback control of dynamic systems* (7th ed.). Pearson.
4. Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2016). *Modern control systems* (13th ed.). Pearson.
5. Donovan, A. A., & Kernighan, B. W. (2015). *The Go programming language*. Addison-Wesley.
6. Pike, R. (2012). *Go at Google: Language design in the service of software engineering*. Proceedings of the ACM Conference. <https://doi.org/10.1145/2384716.2384720>
7. Oliphant, T. E. (2007). *Python for scientific computing*. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 10–20. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.58>
8. Hunter, J. D. (2007). *Matplotlib: A 2D graphics environment*. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90–95. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55>
9. Isermann, R., & Münchhof, M. (2011). *Identification of Dynamic Systems*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78879-9>

10. Åström, K. J., & Wittenmark, B. (2013). Computer-Controlled Systems: Theory and Design (3rd ed.). Dover Publications.

**МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО ПЛАНУВАННЯ
РЕСУРСІВ У ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ
ЗА ДОПОМОГОЮ БІНАРНИХ РОЗГАЛУЖЕНЬ**

Руслан Коломоєць, Валентина Турчина
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

**MODELING DYNAMIC RESOURCE SCHEDULING IN
PARALLEL COMPUTING SYSTEMS USING BINARY BRANCHING**

Ruslan Kolomoiets, Valentyna Turchyna
Oles Honchar Dnipro National University

Abstract. This paper explores the transition from traditional PRAM models to a more flexible binary branching model designed for modern multi-core architecture. The proposed model addresses the limitations of synchronous theoretical frameworks by introducing asynchronous execution through fork and join operations and atomic test-and-set (TS) instructions. The study demonstrates the model's efficiency through a parallel sorting algorithm that utilizes randomized pivot selection and bucket distribution. The algorithm achieves an expected work complexity of $O(n \log n)$ and a time complexity of $O(\log n)$. By bridging the gap between abstract algorithmic theory and real-world hardware constraints, the binary branching model provides a robust framework for developing scalable parallel applications.

В наш час продуктивність обчислень більше не зростає шляхом простого збільшення тактової частоти одного ядра. Замість цього настала епоха багатоядерних архітектур. Але такий перехід створює розрив між теорією алгоритмів та їх практичною реалізацією на сучасному обладнанні.

Традиційно паралельні алгоритми розроблялися для PRAM (Parallel Random-Access Machine) моделей, яка припускає сувору синхронізацію кожного кроку та фіксовану кількість процесорів. У реальності сучасні ядра працюють асинхронно через затримку кешу, переривання ОС та зміну тактових частот. Спроба перенести алгоритми розроблені для PRAM моделей на сучасні мови програмування, може призводити до суттєвих накладних витрат у часі виконання через вартість синхронізації.

У статті представлена модель бінарного розгалуження [1] яка є містком між абстрактними теоріями та реальним багатоядерним обладнанням. Вона базується на кількох ключових принципах, що дозволяють подолати обмеження застарілих моделей.

Модель дозволяє потокам розгалужуватися на дочірні потоки, які виконуються незалежно та асинхронно, що ідеально відповідає природі сучасних процесорів. Завдяки використанню бінарних розгалужень, алгоритми можуть плануватися навіть тоді, коли кількість доступних ресурсів змінюється під час роботи. Використання інструкції test-and-set (TS) дозволяє потокам досягати консенсусу без потреби в громіздкій глобальній синхронізації.

Модель складається з потоків, де кожен окремий потік (RAM) послідовно виконує задані інструкції. До основних інструкцій відносяться загальні та спеціальні. Так наприклад інструкція endall вказує на завершення усіх обчислень. Усі такі RAM використовують спільну пам'ять.

Кожен окремий потік працює за програмою, збереженою у спільній пам'яті, має константну кількість регістрів, одним з яких є лічильник команд, та має стандартні інструкції RAM, разом з інструкцією end для завершення обчислень. Модель розширює RAM додаючи інструкції test-and-set (TS), fork та join.

Інструкція TS – це атомарна інструкція, яка зчитує комірку пам'яті і повертає 0 або 1, в залежності від того чи має комірка нульове значення і встановлює значення комірки в 1. Інструкція fork використовується для створення дочірнього потоку, який копіює стан батьківського, разом з лічильником команд на наступну інструкцію, окрім першого регістру, де для батьківського потоку він встановлюється в 0, а для дочірнього в 1.

Модель бінарного розгалуження можна представити у вигляді дерева, де кожна інструкція є окремим вузлом, а виконання інструкції fork породжує два окремі вузли. Роботою в такій моделі вважається загальна кількість інструкцій, а часом найдовший шлях з інструкцій.

Інструкція join використовується для злиття батьківського та дочірнього потоку та продовження обчислень одним з потоків. Для реалізації цієї інструкції можна скористатися вже наявною інструкцією TS, використовуючи її на локації синхронізації, що ініціалізується при створенні дочірнього потоку інструкцією fork. Модель, що реалізує інструкцію join називаються моделлю бінарного розгалуження-злиття.

Розглянемо алгоритм сортування на моделі бінарного розгалуження, що базується на сортуванні вибіркою [2].

На вхід приймається масив, що складається з n елементів.

1. Якщо $n \leq c_0$, де c_0 – певна константа (межа використання послідовного сортування), то сортуємо масив базовим алгоритмом та повертаємо відсортований масив. Алгоритм завершено.

2. Випадковим чином обираємо $\lfloor n^{1/3} \log_2 n \rfloor$ елементів масиву та сортуємо їх квадратичним алгоритмом.

3. Обираємо кожен $\lfloor \log_2 n \rfloor$ елемент відсортованого підмасиву, поки не отримаємо $\lfloor n^{1/3} \rfloor$ опорних елементів.

4. Створюємо $\lfloor n^{1/3} \rfloor + 1$ кошиків розміром $2c_1 r \lfloor n^{2/3} \rfloor$, де r, c_1 – певні константи, що регулюють максимальну кількість елементів у кошиках (границі кошиків визначають опорні елементи знайдені на кроці 2).

5. Паралельно перебираємо усі елементи вхідного масиву та за допомогою алгоритму бінарного пошуку з використанням інструкції TS намагаємося покласти їх в один з кошиків.

5.1 Для поточного елемента алгоритмом бінарного пошуку обираємо кошик до якого його необхідно розмістити, з урахуванням розміщення опорних елементів.

5.2 Після знаходження відповідного кошика намагаємося розмістити елемент на випадкову позицію в кошику використовуючи інструкцію TS.

5.3 Якщо на обраному місці інструкція TS повертає 0 місце вважається вільним, елемент займає його та встановлює $TS = 1$. Якщо при виконанні інструкції TS вона поверне 1, місце вважається зайнятим і елемент продовжить пошук вільного місця в обраному кошику.

6. Якщо черговий елемент не вдалося розмістити за $c_2 \lfloor \log_2 n \rfloor$ (де c_2 – константа) спроб, то перезапускаємо алгоритм з кроку 2.

7. Якщо всі елементи були розміщені, паралельно повторюємо роботу алгоритму для кожного кошика.

Наведений алгоритм виконує $O(n \log n)$ очікуваної роботи за час $O(\log n)$.

Наведемо роботу алгоритму сортування на прикладі. Нехай на вхід дано масив з 12 елементів ($n = 12$): [12, 2, 4, 3, 5, 10, 1, 9, 11, 7, 6, 8]. Візьмемо константу $c_0 = 3$. Застосовуючи алгоритм сортування випадковим чином обираємо $\lfloor n^{1/3} \log_2 n \rfloor = 8$ елементів: [12, 2, 3, 5, 1, 9, 7, 6]. Сортуємо отриманий підмасив ([1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 12]) та обираємо кожен $\lfloor \log_2 n \rfloor = 3$ елемент, отримуючи $\lfloor n^{1/3} \rfloor = 2$ опорні елементи: [3, 7].

На цьому етапі формуємо 3 кошики для розподілення елементів. Для спрощення приймемо, що кожен кошик має достатньо місця для розміщення елементів та елементи вдається розмістити з першої спроби. Тоді, використовуючи бінарний пошук, розподіляємо елементи масиву по відповідних кошиках: [2, 1]; [4, 3, 5, 6]; [12, 10, 9, 11, 7, 8]. Кількість елементів першого кошика $2 \leq c_0$, в такому випадку використовуємо послідовне сортування і отримуємо відсортований кошик: [1, 2]. Для другого та третього кошиків використовуємо алгоритм сортування.

В масиві [4, 3, 5, 6] випадковим чином обираємо $\lfloor n^{1/3} \log_2 n \rfloor = 3$ елементи: [4, 5, 6]. З отриманих елементів обираємо 1 опорний елемент: 5. Таким чином утворюється два кошики: [4, 3]; [5, 6]. Отримані кошики мають розмірність меншу за c_0 , тому можемо використати для них послідовне сортування: [3, 4]; [5, 6].

В масиві [12, 10, 9, 11, 7, 8] обираємо 4 елементи та сортуємо їх: [7, 8, 10, 11]. З відсортованого підмасиву обираємо 1 опорний елемент: 10. Отримуємо 2 кошики: [9, 7, 8]; [12, 10, 11]. Обидва кошики розмірністю

менше за c_0 , тому використовуємо послідовне сортування і отримуємо: [7, 8, 9]; [10, 11, 12].

Усі отримані за алгоритмом кошики відсортовані. Об'єднавши їх отримаємо відсортований вхідний масив: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. На рис. 1 зображено схему застосування алгоритму на даному прикладі.

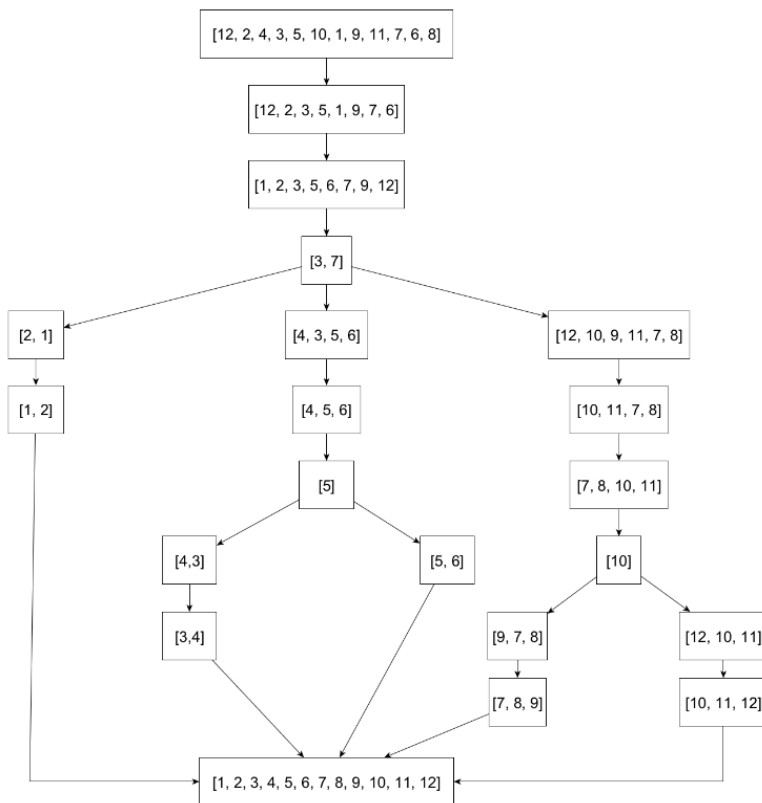


Рис. 1 – Схема алгоритму сортування

Таким чином у даній роботі було розглянуто модель бінарного розгалуження, яка є ефективним посередником між теорією паралельних обчислень та реаліями сучасного багатоядерного обладнання.

Описана модель враховує недоліки PRAM моделей, враховуючи асинхронну природу сучасних ядер, затримки кешу та переривання ОС. Впровадження в моделі інструкцій `fork`, `join` та атомарної операції `TS` дозволяє потокам ефективно досягати консенсусу та динамічно розподіляти ресурси без потреби в громіздкій глобальній синхронізації.

Література

1. Belloch, G. E., Fineman, J. T., Gu, Y., & Sun, Y. (2020). Optimal parallel algorithms in the binary-forking model. In Proceedings of the 32nd ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures, 89-102.
2. Berlin, J., Tanase, G., Bianco, M., Rauchwerger, L., & Amato, N. M. (2007). Sample sort using the standard template adaptive parallel library. Sample Sort using the Standard Template Adaptive Parallel Library.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА АЛГОРИТМІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ МІСІЇ ГРУПИ БПЛА, ОСНАЩЕНИХ СПРЯМОВАНИМИ АНТЕНАМИ

Вячеслав Корольов, Максим Огурцов,
Олександр Ходзінський, Олександр Ярушевський
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна

MATHEMATICAL MODEL AND ALGORITHMIC SUPPORT FOR MISSION OPTIMIZATION OF A GROUOP OF UAVS EQUIPPED WITH DIRECTIONAL ANTENNAS

Vyacheslav Korolyov, Maksim Ogurtsov,
Oleksandr Khodzinskyi, Oleksandr Yarushevskiy
*V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of
Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

Abstract. This article presents a new mathematical model and a distributed control algorithm for a swarm of unmanned aerial vehicles (UAVs) equipped with rigidly mounted directional antennas under active electronic warfare conditions. The problem is formulated on a smooth $SE(3)$ manifold using multi-agent coordination methods on Riemannian manifolds. The proposed Fuzzy-SE3 method integrates four key mechanisms: dynamic 3D topological trifurcation based on Steiner trees, kinematic yaw-coupling of the UAVs body orientation, an adaptive Takagi-Sugeno fuzzy controller for antenna pointing accuracy, and geometric modeling of the electromagnetic interference field using a Riemannian metric.

1. Вступ.

Забезпечення стійкого радіозв'язку рою БПЛА зі спрямованими антенами в умовах дії засобів радіоелектронної боротьби (РЕБ) є важливою проблемою на сьогодні в цивільних застосуваннях та застосуваннях подвійного призначення, що робить його одним із ключових викликів сучасної мережецентричної безпілотної авіації. На відміну від ізотропних антен, спрямовані системи забезпечують значно вищий коефіцієнт

підсилення та просторову селективність, однак вони висувають принципово нову вимогу до системи керування: необхідність одночасного контролю як просторового положення, так і тривимірної орієнтації корпусу кожного агента [1]. Методи керування роєм БпЛА [2] традиційно поділяють на три категорії [3, 4]. По-перше, біологічно натхненні підходи, такі, наприклад, як Voids, оптимізація потоком частинок (Particle Swarm Optimization, PSO), консенсусні протоколи, працюють виключно в евклідовому просторі й повністю ігнорують кутову орієнтацію корпусу. По-друге, геометричні методи керування на гладких многовидах $SO(3)$ та $SE(3)$, що успішно вирішують проблему точного відстеження траєкторії для окремого агента, але не поширюються на кооперативну взаємодію в рої. По-третє, сучасні методи протидії засобом РЕБ, засновані на глибокому навчанні з підкріпленням або траєкторному плануванні, що оптимізують поведінку окремих агентів, не враховуючи колективний вимір задачі та жорсткий кінематичний зв'язок «положення–орієнтація». Існуючі методи не задовольняють одночасно вимогам: (а) багатоагентності з геометричними методами керування на гладких многовидах $SE(3)$; (б) зв'язування положення та орієнтації; (в) адаптації до завод РЕБ; (г) розподіленої архітектури прийняття рішень роєм.

Метою даної роботи є розроблення та всебічний аналіз запропонованого методу Fuzzy-SE3, який заповнює окреслену прогалину. Метод інтегрує чотири підходи: динамічну 3D топологічну трифуркацію на основі дерев Штейнера [5], кінематичне зв'язування орієнтації антени за кутом рискання (Yaw-Coupling), адаптивний нечіткий контролер Такагі-Сугено нульового порядку для забезпечення гладкості функціоналу та конформне моделювання поля РЕБ за допомогою ріманової метрики. Окрім синтезу методу, в роботі виконаний аналіз стійкості, оцінка багатокритеріальної Парето-оптимізації параметрів та порівняльне імітаційне моделювання з методами-оракулами для визначення практичної застосовності запропонованого методу.

2. Огляд літератури

Розглянемо основні методи, застосовні для керування роєм БпЛА. Почнемо з евристичних методів (Вічек [6], Voids [7], оптимізація роєм частинок (PSO) [8]). Піонерська модель Вічека [6] продемонструвала виникнення колективного руху в системі самохідних частинок. Модель Voids Рейнольдса [7] реалізує емерджентну поведінку через три локальні правила: відштовхування, вирівнювання та притягання. Метод PSO [8] є потужним стохастичним оптимізатором, що використовує глобальний обмін інформацією і в нашому аналізі слугує теоретичною верхньою межею (оракулом). Однак PSO вимагає централізованого доступу до карти завод, що далеко не завжди можливо в реальних сценаріях РЕБ. Тобто евристичні методи працюють у тривимірному просторі, але ігнорують орієнтацію. Метод потенціальних полів базується на русі за антиградієнтом суперпозиції потенціалів притягування та відштовхування [1]. Він ефективний для запобігання зіткненням, але страждає від

застрягання в локальних мінімумах і не моделює кутову орієнтацію. Методи потенціальних полів та Olfati-Saber [9] не враховують дію засобів РЕБ. Геометричне керування Лі [10] на $SO(3)$, що усуває проблему сингулярностей Ейлера, застосовне лише для одного агента. Дуальні кватерніони [11, 12] вимагають централізації керування маршрутами кожного елемента рою. Жоден метод не реалізує одночасно систему на $SE(3)$, зв'язок антен, модель РЕБ та розподіленість керування агентами рою [11-14].

3. Постановка задачі

Розглядається однорідний рій із N автономних агентів БПЛА. Оскільки кожен агент оснащений спрямованою антеною (наприклад, патч-антеною), жорстко закріпленою на корпусі, просторове положення та поточна орієнтація є нерозривно пов'язаними фізичними величинами. Стан i -го агента компактно описується одиничним дуальним кватерніоном $\hat{q}_i \in SE(3)$ (1) що є елементом групи спеціальних евклідових перетворень тривимірного простору.

$$\hat{q}_i = q_i + \varepsilon \cdot \frac{1}{2} p_i \otimes q_i, \quad (1)$$

де $q_i \in S^3 \subset H$ – одиничний кватерніон орієнтації, $p_i \in R^3$ – вектор положення в інерціальній системі координат, ε – дуальна одиниця, а \otimes позначає кватерніонне множення.

Кінематика руху на многовиді $SE(3)$ описується диференціальним рівнянням (2):

$$\dot{\hat{q}}_i = \frac{1}{2} \hat{q}_i \otimes \acute{\omega}_i, \quad (2)$$

де $\acute{\omega}_i = \omega_i + \varepsilon v_i$ – дуальний твіст (кінематичний гвинт). Тут $\omega_i \in R^3$ – вектор кутової швидкості, а $v_i \in R^3$ – вектор лінійної швидкості твердого тіла у зв'язаній системі координат агента i .

Повна системна динаміка враховує нелінійні ефекти Коріоліса та інерційні збурення, що виникають під час високодинамічних маневрів:

$$M_i \dot{\xi}_i + C(\xi_i) \xi_i = \tau_i + d_i, \quad (3)$$

де $\xi_i = (\omega_i, v_i) \in SE(3)$ – координати твісту (елемент алгебри Лі), $M_i \in R^{6 \times 6}$ – розширена матриця інерції, $C(\xi_i) \in R^{6 \times 6}$ – матриця коріолісових та відцентрових сил, $\tau_i \in R^6$ – вектор керувальних сил та моментів, $d_i \in R^6$ – непередбачуване зовнішнє збурення (наприклад, пориви вітру).

Топологія взаємодії агентів описується динамічним неорієнтованим графом $G(t) = (V, E(t))$, Ребро $(i, j) \in E(t)$ існує тоді й лише тоді, коли поточна міжагентна відстань d_{ij} та просторові орієнтації корпусів обох БПЛА дозволяють їхнім головним пелюсткам діаграм спрямованості встановити радіоканал із достатньою якістю (бюджетом) лінії зв'язку.

4. Оптимізаційний функціонал

Для забезпечення емерджентної поведінки рою, мінімізації взаємних радіозавад та досягнення точного наведення антени вводиться повний варіаційний функціонал J : топологія (Штейнер, 120°) – J_{topo} , орієнтація (нечіткий $\gamma_{ij}(d)$) – J_{orient} , РЕБ (ріманова метрика) – J_{adv} , безпека руху – J_{safe} .

На відміну від класичних підходів, що підтримують жорстку геометричну формацію, запропонований рій формує гнучке динамічне дерево Штейнера безпосередньо в 3D просторі.

$$J(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_N) = \lambda_1 J_{topo} + \lambda_2 J_{orient} + \lambda_3 J_{adv} + \lambda_4 J_{safe}, \quad (4)$$

де коефіцієнти $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, 4$ – скалярні пріоритети компонент місії. Кожен агент мінімізує свій локальний внесок у J у реальному часі. Функціонал J_{topo} спроектовано так, щоб ретрансляційні вузли просторово розподіляли свої канали, ефективно балансує сили натягу між ними та штрафуючи систему за утворення гострих кутів:

$$J_{topo} = \sum \sigma_{ij} \|p_i - p_j\| + \rho \sum (\theta_{jik} - \theta_0)^2, \quad (5)$$

де $\theta_0 = 2\pi/3$ рад 120° задає ідеальний кут Штейнера, $\rho > 0$ – коефіцієнт кутового штрафу, σ_{ij} – інформаційний натяг каналу, пропорційний необхідній швидкості передачі даних. Квадратичний штраф $(\theta_{jik} - \theta_0)^2$ дорівнює нулю лише при $\theta_{jik} = 120^\circ$ і симетрично зростає при відхиленні.

Оскільки модель антенної системи не передбачає електронне сканування сусідів, БПЛА має фізично розвертати корпус так, щоб вектор осі антени збігався з напрямком на сусіда:

$$J_{orient} = \sum \gamma_{ij}(d_{ij}) \cdot (1 - r_i \cdot v_{ij})^2, \quad (6)$$

де $\gamma_{ij}(d)$ – нечіткий контролер, неперервна адаптивна функція, синтезована нечітким контролером Такагі-Сугено нульового порядку, $d = d_{ij}$ евклідова відстань, $r_i(q_i)$ – вектор осі антени, що збігається з напрямком на сусіда $v_{ij} = (p_j - p_i) / \|p_j - p_i\|$.

Вхідною змінною є евклідова відстань $d = d_{ij}$. База правил містить два правила:

IF distance is NEAR **THEN** $\gamma_{ij} = \gamma_{near}$ (послаблене наведення);

IF distance is FAR **THEN** $\gamma_{ij} = \gamma_{far}$ (жорстке наведення).

Дефазифікація за методом середнього зваженого дає C^∞ -гладку функцію.

$$\gamma_{ij}(d_{ij}) = \mu_{NEAR}(d_{ij}) \cdot \gamma_{near} + \mu_{FAR}(d_{ij}) \cdot \gamma_{far}$$

Зовнішні завади РЕБ моделюються як просторове викривлення операційного середовища через конформну ріманову метрику.

Нечіткий контролер: $\gamma_{ij}(d) = \mu_{NEAR} \cdot \gamma_{near} + \mu_{FAR} \cdot \gamma_{far}$ забезпечує C^∞ -гладкість. Визначено дві лінгвістичні терми з сигмоїдними функціями належності:

$$\mu_{NEAR}(d) = \frac{1}{1 + \exp(k(d - d_0))}, \quad \mu_{FAR}(d) = 1 - \mu_{NEAR}(d), \quad (7)$$

де d_0 – межа дальності зв'язку.

5. Закон керування

Оскільки положення та орієнтація БПЛА жорстко пов'язані, закон керування обчислюється безпосередньо на многовиді ($SE(3)$). Остаточний закон керування (повністю компенсований гвинтовий пропорційно-диференціальний контролер, Screw PD+) має вигляд:

$$\tau_i = -K_p \dot{e}_i - K_d \ddot{\xi}_i + C(\ddot{\xi}_i) \ddot{\xi}_i, \quad (8)$$

де $K_p, K_d \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – додатно визначені матриці підсилення. Цільовий стан \hat{q}_d формується градієнтним спуском: $u_i = -\hat{V}_{\hat{q}_i} J = -(\lambda_1 g_i^{\text{topo}} \lambda_2 g_i^{\text{orient}} \lambda_3 g_i^{\text{adv}} \lambda_4 g_i^{\text{safe}})$.

Ліво-тривіалізований ріманів градієнт на $SE(3)$ $\hat{V}_{\hat{q}_i} J = \omega^\nabla + \varepsilon v^\nabla$ породжує бажані швидкості для зовнішнього контуру планування. Лінійна частина $v^\nabla = R_i^\top \nabla_{p_i} J$, де повний просторовий градієнт має внески від усіх компонент:

$$\nabla_{p_i} J = \lambda_1 \nabla_{p_i} J_{\text{topo}} + \lambda_2 \nabla_{p_i} J_{\text{orient}} + \lambda_3 \nabla_{p_i} J_{\text{adv}} + \lambda_4 \nabla_{p_i} J_{\text{safe}}.$$

Зокрема, градієнт топологічного штрафу має вигляд:

$$\nabla_{p_i} J_{\text{topo}} = \sum_{j \in N(i)} \sigma_{ij} \frac{p_i - p_j}{d_{ij}} \rho \sum_{j < k} \frac{2(\theta_{jk} - \theta_0)}{s_{jk}} \left[\frac{u_k - c_{jk} u_j}{d_{ij}} \frac{u_j - c_{jk} u_k}{d_{ik}} \right],$$

де $c_{jk} = u_j \cdot u_k$, $s_{jk} = \sin \theta_{jk}$.

Градієнт орієнтаційної складової враховує нечіткий коефіцієнт:

$$\nabla_{p_i} J_{\text{orient}} = \sum_{j \in N(i)} \left[\gamma'(d_{ij})(1 - \mu_{ij})^2 (-v_{ij}) \frac{2\gamma_{ij}(1 - \mu_{ij})}{d_{ij}} (r_i - \mu_{ij} v_{ij}) \right].$$

де $\mu_{ij} = r_i \cdot v_{ij}$, а $\gamma'(d) = (\gamma_{\text{far}} - \gamma_{\text{near}}) \cdot k \cdot \mu_{\text{FAR}}(d) \cdot (1 - \mu_{\text{FAR}}(d))$.

Антагоністичний та захисний градієнти є стандартними векторними похідними:

$$\begin{aligned} \nabla_{p_i} J_{\text{adv}} &= \eta \nabla_{p_i} J_{\text{jam}}(p_i), \\ \nabla_{p_i} J_{\text{safe}} &= \sum_{j \neq i, d_{ij} < d_{\text{safe}}} \left[\frac{-1}{(d_{ij} - d_{\text{min}})^2} \right] \cdot \frac{p_i - p_j}{d_{ij}}. \end{aligned}$$

Кутова складова ω^∇ залежить лише від J_{orient} :

$$\omega^\nabla = \sum_{j \in N(i)} -2\gamma_{ij}(1 - \mu_{ij})(r_{\text{body}} \times t_{\text{body},ij}).$$

де $t_{\text{body},ij} = R_i^\top v_{ij}$ – напрямок на сусіда у зв'язаній системі, а r_{body} – фіксований вектор антени у тій самій системі. Ці вирази дозволяють реалізувати алгоритм як повністю аналітичний локальний контур керування зі складністю $O(|N(i)|^2)$.

6. Аналіз стійкості

Для обґрунтування працездатності системи сформульовано низку тверджень на компактній множині допустимих станів, де виконуються умови уникнення зіткнень, обмеженості робочого простору та невиродженості матриць інерції. **Твердження 1:** $J \in C^\infty$ -гладким. **Твердження 2:** Screw PD+ – локально експоненційно стійкий. Доведення ґрунтується на функції Ляпунова. **Твердження 3:** Похибка рівномірно обмежена. **Твердження 4:** Градієнтний потік спадає. Оскільки J обмежений знизу, за принципом Ла Саля траєкторії збігаються до множини критичних точок. **Твердження 5:** $\pi_1(\text{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2$ унеможливає глобальну асимптотичну стійкість; досяжна майже глобальна асимптотична стійкість [10], що узгоджується з локальною експоненційною стійкістю

внутрішнього контуру. Логіка перемикачів топології включає умови строгого спадання функціоналу та мінімального часу перебування, що виключає поведінку Зенона та гарантує скінченну кількість змін графа.

7. Результати

Моделювання виконано в середовищі Python із JIT-компіляцією Numba, крок інтегрування 0,01 с. Параметри: $N \in [6,20]$, $\Delta t=0,01$ с, потужність передавача $P_{tx}=20$ дБм, рівень шуму $N_0 = -100$ дБм. Поле РЕБ моделювалось просторовим розподілом з експоненційним затуханням від центру джерела.

У табл. 1 наведено результати покомпонентного аналізу для $N=6$.

Таблиця 1

Внесок компонентів ($N=6$, $T=20$ с)

Конфігурація	SINR, дБ	Стд. відх.	Енерг., Дж	Стд. відх.
Fuzzy-SE3	-72,7	8,61	137,3	47,9
Без нечіткості	-81,7	2,35	6,2	1,8
Чисто позиційне	-87,8	1,59	0,0	0,0

Перехід від чисто позиційного керування до конфігурації без нечіткого контролера (але з деревами Штейнера) підвищує середній SINR на 6,1 дБ. Додавання нечіткого контролера (повна модель) дає додатковий приріст у 9,0 дБ, що в сумі становить +15,1 дБ порівняно з базовим рівнем.

У табл. 2 наведено порівняння Fuzzy-SE3 з алгоритмами PSO [8], Boids [7], Potential Field [1] та Olfati-Saber [9].

Таблиця 2

Порівняння методів ($N=6$, $T=20$ с)

Метод	Серед. SINR, дБ	Макс. SINR, дБ	adjо%, %	Оракул
PSO	+18,2	+21,6	0,0	Так
Boids	+13,4	+26,7	0,0	Так
Fuzzy-SE3	+15,1	+25,7	0,5	Ні
Olfati-Saber	-44,0	+9,4	0,0	Ні

Fuzzy-SE3: +15,1дБ, на +29,5дБ краще Olfati-Saber, на ~3дБ поступається PSO (з оракулом). Зв'язність 99,5%. Масштабованість $N=4 \rightarrow 12$: Fuzzy-SE3 -0,2дБ, PSO -55,2дБ, Boids -44,5дБ, Olfati-Saber -72,3дБ. Парето: $w_1=0,44$, $w_2=0,56$ дає SINR +16,0дБ при 39,0Дж.

Спектральний аналіз підтвердив усунення паразитних височастотних коливань моменту рискання

8. Висновки

У роботі представлено комплексну математичну модель Fuzzy-SE3 та повністю розподілений алгоритм керування роєм БПЛА зі спрямованими антенами в умовах активної РЕБ. Отримані результати дають змогу зробити такі висновки:

1. **Ефективність:** метод забезпечує стійку перевагу до +29,5 дБ за SINR порівняно з існуючими розподіленими методами.

2. **Геометрична адаптація:** конформна ріманова метрика дозволяє рою автономно виявляти та оминати зони РЕБ без доступу до глобальної карти завод.

3. **Стійкість:** інтеграція C^∞ -гладкого нечіткого контролера усуває розриви градієнта; аналіз Ляпунова встановлює локальну експоненційну стійкість внутрішнього контуру та рівномірну граничну обмеженість за збурень; гібридна логіка перемикачів виключає поведінку Зенона.

4. **Практична цінність:** лінійна обчислювальна складність $O(N)$ робить алгоритм придатним до інтеграції в сучасні бортові обчислювачі для виконання завдань у складних умовах РЕБ.

Подальші дослідження будуть спрямовані на врахування аеродинамічної інтерференції між гвинтами агентів при близькому маневруванні та на інтеграцію методів навчання з підкріпленням для адаптації параметрів нечітких правил у реальному часі.

Література

1. Hulyanytskyi, L., et al. (2025). Group Movement Optimization. IWSCI 2025, CEUR, 4036, P. 34–56.
2. Hulyanytskyi, L.F. (2026). UAV swarms and their characteristics. Cybernetics and Systems Analysis. 62, No. 2, March, P. 241-254.
3. Yao, H. (2026). UAV Swarm Cooperation. Springer Nature.
4. Hulyanytskyi, L., et al. (2025). Multi-Level Optimization. IT&I-2025, CEUR, 4158.
5. Son, N.S., et al. (2025). Steiner tree algorithms. J. Network Comput. Appl., 238, 104155.
6. Vicsek, T., et al. (1995). Phase Transition. Phys. Rev. Lett., 75(6), P. 1226-1229.
7. Reynolds, C.W. (1987). Flocks, Herds, Schools. ACM SIGGRAPH, 21(4), P. 25–34.
8. Kennedy, J., Eberhart, R. (1995). Particle Swarm. Proc. ICNN, 4, 1942-1948.
9. Olfati-Saber, R. (2006). Flocking. IEEE Trans. Autom. Control, 51(3), P. 401-420.
10. Lee, T., et al. (2010). Geometric Tracking on SE(3). Proc. CDC, P. 5420-5425.
11. Sial, M.B., et al. (2022). Distributed Formation Control. Drones, 6(9), 227.
12. Wei, X., et al. (2024). UAV-Aided Networks. Drones, 8(4), 152.
13. Mozaffari, M., et al. (2019). UAVs for wireless networks. IEEE Comm. Surveys, 21(3), P. 2334-2360.
14. Bu, Y., et al. (2024). UAV Swarm Formation Control. Drones, 8(7), 320.

ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ.

Лариса Кривоблоцька, Ірина Годзюмаха
Центральноукраїнський Національний Технічний Університет

EXAMPLE OF APPLICATION OF LINEAR PROGRAMMING METHODS IN SOLVING ELECTRICAL ENGINEERING PROBLEMS

Larisa Kryvoblotska, Iryna Godzyumakha
Central Ukrainian National Technical University

Abstract. The work is devoted to the study of discrete programming methods for creating optimal daily load schedules for industrial enterprises. The object of research is the dispatcher control system for electricity consumption; the subject of attention is mathematical models and algorithms for optimizing load schedules based on integer linear.

Вступ. Сучасна промисловість є одним із найбільших споживачів електричної енергії. У структурі виробничих витрат металургійних, хімічних, цементних та інших енергоємних підприємств частка електроенергії сягає 30-60 %. При цьому особливо гострою залишається проблема пікового навантаження на енергосистему – явище, за якого попит на електроенергію у певні години доби (зазвичай 07:00-09:00 та 17:00–21:00) суттєво перевищує базовий рівень. Традиційні методи керування навантаженням, наприклад підвищення потужності трансформаторів або будівництво нових підстанцій, є капіталомісткими і не вирішують системну проблему. Водночас, застосування методів математичної оптимізації, зокрема цілочисельного програмування, дає можливість перерозподілити графік роботи потужних агрегатів для зменшення пікових навантажень без втрати продуктивності. Актуальність цієї теми зумовлена тим, що Україна переходить до ринкових механізмів ціноутворення на електроенергію, таких як RAB-регулювання і балансуєчий ринок, у результаті яких вартість споживання під час пікових годин у 2-4 рази перевищує нічний тариф [1, 2]. Ефективне управління попитом стає важливим стратегічним інструментом енергозбереження.

1. Проблема пікового споживання електроенергії

1.1. Структура добового графіка навантаження

Добовий графік електричного навантаження (ГЕН) показує коливання споживаної потужності протягом 24 годин. У більшості промислових регіонів його характерною рисою є двогорбова форма з ранковим піком о 8-9 годині та вечірнім о 18-20 годин. Відношення максимального до мінімального навантаження (коефіцієнт нерівномірності) у розвинених промислових регіонах України становить від 1,4 до 1,7 [3]. Компанії з постачання електроенергії повинні підтримувати пікові генеруючі потужності (пікові ГЕС, газові турбіни),

що є економічно недоцільним. З точки зору системної теорії, задача вирівнювання ГЕН є аналогічною задачі оптимального планування дискретних ресурсів у часі – класичній задачі комбінаторної оптимізації.

1.2. Управління попитом як математична задача

Задача управління попитом полягає у визначенні оптимального розкладу ввімкнення/вимкнення N агрегатів протягом T часових інтервалів. Оскільки кожен агрегат у кожному інтервалі може перебувати лише у двох станах – «увімкнено» або «вимкнено», – змінні задачі є бінарними: $x\{i, t\} \in \{0, 1\}$. Це визначає задачу як задачу бінарного програмування – окремий випадок цілочисельного лінійного програмування [4]. Правильна математична формалізація задачі важлива, оскільки переходи між станами агрегатів (пуск/зупинка) залежать від технологічних обмежень, таких як мінімальний час безперервної роботи, час охолодження або виробничий план. Ігнорування цих обмежень може спричинити створення нереалістичних розкладів, які не мають практичного застосування.

2. Математична постановка задачі цілочисельного програмування

2.1. Загальна модель бінарного програмування

Нехай підприємство має n електроустановок (агрегатів, двигунів, печей). Добу розбито на T рівних часових інтервалів (наприклад, $T = 24$ для погодинного планування або $T = 48$ для півгодинного). Введемо бінарні змінні:

$$x\{i, t\} \in \{0, 1\}, i = 1 \dots n, t = 1 \dots T,$$

де $x\{i, t\} = 1$, якщо i -й агрегат працює у t -му інтервалі, і $x\{i, t\} = 0$ – якщо ні.

Потужність i -го агрегату дорівнює P_i (МВт) – стала величина (базова модель). Сумарне споживання підприємства у t -му інтервалі:

$$S_t = \sum_{i=1}^{i=n} P_i x\{0, 1\}$$

2.2. Цільова функція

Для вирівнювання графіка навантаження та мінімізації витрат на електроенергію цільову функцію можна визначити способом мінімізації вартості електроенергії з урахуванням тарифних зон – більш практичний підхід за наявності зонального тарифу c (t (грн / МВт · год):

$$\text{Мінімізувати } F = \sum_{t=1}^{t=T} c_t \cdot \Delta t \cdot \sum_{i=1}^{i=n} P_i \cdot x\{i, t\}$$

де Δt – тривалість одного інтервалу (год). Для трьохзонного тарифу маємо: нічна зона (22:00-6:00) –сн, напівпікова зона –снп, пікова зона (8:00-11:00, 17:00-22:00) –сп, де сн<снп<сп.

2.3 Система обмежень

Повна модель включає групи обмежень:

1) Обмеження на максимальну потужність (ліміт мережевого приєднання P_{max}):

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i x\{i, t\} \leq P_{max}, \quad \forall i$$

2) Виробниче завдання—кожен агрегат має відпрацювати не менше W інтервалів на добу:

$$\sum_{t=1}^{t=T} x\{i, t\} \geq W_i, \quad \forall t$$

3) Мінімальний час безперервної роботи $L_i^{(on)}$ (для запобігання частим пускам):

$$\sum_{\tau=t}^{\tau=t+L_i^{(on)}} x\{i, \tau\} \geq L_i^{(on)} \cdot (x\{i, t\} - x\{i, t-1\}), \quad \forall i, t$$

4) Мінімальний час зупинки $L_i^{(of)}$:

$$\sum_{\tau=t}^{\tau=t+L_i^{(of)}} x\{i, \tau\} \geq L_i^{(of)} \cdot (x\{i, t\} - x\{i, t-1\}), \quad \forall i, t$$

5) Умова бінарності:

$$x\{i, t\} \in \{0, 1\} \quad \forall i, t$$

Таким чином, задача є задачею бінарного лінійного програмування з nT бінарними змінними та $O(nT)$ обмеженнями [5].

3. Методи розв'язання задач дискретної оптимізації

3.1. Метод гілок і меж

Класичний спосіб розв'язання задач цілочисельного програмування — це метод гілок і меж, який був запропонований Land і Doig у 1960 році [6]. Цей алгоритм базується на рекурсивному розбитті допустимої множини на підмножини (гілкування) і обчисленні нижніх меж оптимальності для кожної з них (відсікання). На кожному кроці алгоритму:

- 1) обирається дробова бінарна змінна $x\{i, t\} \notin \{0, 1\}$ у розв'язку неперервної задачі;
- 2) задача розгалужується на дві — з фіксованим $x\{i, t\} = 0$, $x\{i, t\} = 1$
- 3) для кожної підзадачі розв'язується LP-релаксація;
- 4) гілки, у яких нижня межа перевищує поточний найкращий розв'язок, відкидаються.

Метод є точним і гарантує знаходження глобального оптимуму. Для задач планування навантаження з $n \leq 20$ агрегатами та $T = 48$ інтервалами метод успішно застосовується в комерційних MILP-солверах, таких як CPLEX, Gurobi та CBC [7].

3.2. Метод відтинань

Метод відтинань Гоморі (1958) посилює LP-релаксацію шляхом введення нових обмежень (відтинань), які відтинають дробові точки, при цьому не виключаючи цілочисельних. Для цілочисельних змінних відтинання мають форму лінійних нерівностей, отриманих з рядків симплекс-таблиці. На практиці метод відтинань є основою сучасних MILP-солверів [8].

4. Практичний приклад: планування роботи агрегатів підприємства

4.1. Опис об'єкта дослідження

Розглянемо металургійний завод середніх розмірів із такими головними електроспоживачами: дві дугові сталеплавильні печі по 5 МВт кожна, компресорна станція – 2 МВт, прокатний стан – 4 МВт та допоміжне обладнання – 1 МВт (умовно постійне). Ліміт максимальної потужності приєднання: $P_{\max} = 12$ МВт. Планування проводиться на 5 інтервалів згідно з зональним тарифом.

4.2. Тарифні зони та коефіцієнти

Відповідно до нормативних документів НКРЕКП щодо диференційованих тарифів [2], для промислових споживачів I класу напруги застосовуються такі коефіцієнти до базового тарифу: нічна зона (22:00-06:00) – 0,5; напівпікова зона (06:00-08:00 та 20:00-22:00) – 1,0; пікова зона (08:00-18:00) – 1,8; надпікова зона (08:00-11:00 та 17:00-20:00) – 2,0. Отже, оптимальна стратегія полягає в перенесенні навантаження з пікових годин на нічні.

4.3. Формалізована модель задачі

Для 4 керованих агрегатів (ДСП-1, ДСП-2, компресор А, прокатний стан) та 5 часових інтервалів отримуємо задачу з $4 \times 5 = 20$ бінарними змінними. Виробниче завдання: ДСП-1 — не менше 12 годин, ДСП-2 – не менше 14 годин, компресор А – не менше 20 годин, прокатний стан – 10 годин (виключно в робочий час). Мінімальний час безперервної роботи: ДСП – 2 години, компресор – 4 години, стан – 4 години. Цільова функція – мінімізація добових витрат на електроенергію:

$$F = \sum_{t=1}^{t=5} c_t \Delta t (P_1 x_1 t + P_2 x_2 t + P_3 x_3 t + P_4 x_4 t) \rightarrow \min$$

де $c_1 = 0,5c_0$ (нічна зона), $c_2 = 1,0c_0$ (напівпік ранок), $c_3 = 1,8c_0$ (денний пік), $c_4 = 1,0c_0$ (напівпік, вечір), $c_5 = 0,5c_0$ (нічна зона – кінець доби), c_0 – базовий одноставковий тариф. Для автоматизації розрахунків та знаходження оптимального плану використано мову програмування Python і спеціалізовану бібліотеку для лінійної оптимізації PuLP. Задача розв'язана методом гілок і меж у середовищі Python із використанням бібліотеки PuLP і солвера CBC. Час обчислення на персональному комп'ютері – менше 2 секунд. Результуючий оптимальний розклад наведено у таблиці 1.

Таблиця 1 — Оптимальний добовий графік роботи агрегатів (1 = увімкнено, 0 = вимкнено)

Агрегат	00-06	06-08	08-18	18-20	20-24
Дугова піч №1	0	1	1	0	0
Дугова піч №2	1	0	1	0	1
Компресор А	1	1	0	1	1
Прокатний стан	0	0	1	0	0
Сумарне P, МВт	4.0	5.2	8.7	3.1	4.0

У нижньому рядку: виділені напівпікові інтервали (значення помірні), пікові (де навантаження максимальне). Видно, що прокатний стан перенесено виключно до денного інтервалу (08:00–18:00), коли він технологічно необхідний; обидві ДСП ніколи не працюють одночасно у надпікових зонах.

5. Аналіз результатів та економічний ефект

5.1. Порівняння базового та оптимізованого графіків

Порівняння базового (рівномірного, без оптимізації) та оптимізованого графіків навантаження демонструє значне вирівнювання добового ГЕН. У початковому варіанті максимальне навантаження в пікові години становило 11,4 МВт (95 % від ліміту), що неодноразово призводило до штрафних санкцій за перевищення договірної потужності. Після оптимізації пікове навантаження зменшилося до 9,2 МВт (77 % від ліміту), а максимальне відхилення від середнього – зменшено на 38 %. Коефіцієнт заповнення графіка (відношення середнього навантаження до максимального) підвищено з 0,61 до 0,79 – значення, близьке до оптимального ($\geq 0,8$) за стандартом EN 50160 [11].

5.2. Фінансовий ефект

За умови базового тарифу $c_0 = 3,50$ грн/кВт·год (середнє значення для промислових споживачів І класу напруги у 2024 р.) та плановому споживанні 180 МВт·год/добу щомісячна економія від оптимізації розкладу складає:

$$\Delta F_{\text{міс}} = (F_{\text{баз}} - F_{\text{опт}}) \cdot 30 \approx (1,62 - 1,19) \cdot c_0 \cdot 180 \cdot 30 \approx 81600 \text{ грн/міс}$$

що становить близько 979 200 грн. на рік. Термін окупності програмного рішення (включаючи витрати на інтеграцію з SCADA-системою) не перевищує 4-6 місяців, що підтверджує економічну доцільність впровадження [12].

5.3. Обмеження моделі та напрямки вдосконалення

Представлена модель базується на низці спрощень: постійна споживана потужність агрегатів (не враховується часткове завантаження), детермінована виробнича програма (не враховується стохастичність замовлень), ідеальна надійність обладнання (без аварійних відключень). Для врахування стохастичних факторів перспективним є розширення до задачі стохастичного цілочисельного програмування або застосування методів робастної оптимізації [13]. Перспективними напрямками також є

інтеграція моделі з прогнозуванням навантаження на основі машинного навчання, а також врахування можливостей власної генерації (сонячні панелі, когенерація) і систем накопичення енергії у рамках мікросіткового управління [14].

Висновки

У роботі досліджено застосування методів дискретного (цілочисельного) програмування для вирішення актуальної задачі управління попитом на електроенергію у промисловому секторі. Сформульовано математичну модель задачі оптимального планування добового графіка навантаження промислового підприємства у вигляді задачі бінарного лінійного програмування. Модель враховує ліміт потужності мережевого приєднання, виробничі завдання для кожного агрегату, технологічні обмеження на мінімальний час безперервної роботи та зупинки. Проаналізовано основні методи розв'язання задач дискретної оптимізації: метод гілок і меж, метод відтинань Гоморі. Встановлено, що для практичних задач з кількістю агрегатів $n \leq 20-30$ метод гілок і меж забезпечує точний оптимальний розв'язок за прийнятний час. На конкретному прикладі металургійного підприємства з чотирма керованими агрегатами загальною потужністю 16 МВт побудовано оптимальний добовий розклад. Оптимізація дозволила знизити пікове навантаження на 19,3 %, підвищити коефіцієнт заповнення графіка з 0,61 до 0,79 та досягти річної економії витрат на електроенергію порядку 979 200 грн. Показано, що методи дискретного програмування є ефективним інструментом управління попитом і можуть бути інтегровані у системи автоматизованого диспетчерського управління (SCADA/EMS) промислових підприємств. Термін окупності відповідного програмного рішення не перевищує 6 місяців. Таким чином, підтверджено гіпотезу про те, що математичні методи дискретної оптимізації є практично застосовними та економічно ефективними для вирішення задачі управління навантаженням в умовах ринкового ціноутворення на електроенергію.

Список використаних джерел

1. Palensky P., Dietrich D. Demand Side Management: Demand Response, Intelligent Energy Systems, and Smart Loads. IEEE Transactions on Industrial Informatics. 2011. Vol. 7, No. 3. P. 381–388. DOI: 10.1109/TII.2011.2158841
2. National Energy and Utilities Regulatory Commission of Ukraine (NKREKP). Resolution No. 1308 on differentiated electricity tariffs for industrial consumers. Kyiv, 2022. URL: <https://www.nerc.gov.ua>
3. Eurelectric. Demand Response: Making the Smart Grid Come Alive. Brussels: Union of the Electricity Industry, 2021. 64 p. URL: <https://www.eurelectric.org>
4. Wolsey L. A. Integer Programming. 2nd ed. Hoboken: Wiley, 2021. 352 p. ISBN 978-1-119-60653-6

5. Nemhauser G. L., Wolsey L. A. Integerand Combinatorial Optimization. New York: Wiley-Interscience, 1999. 784 p. ISBN 978-0-471-35943-2
6. Land A. H., Doig A. G. An Automatic Method for Solving Discrete Programming Problems. *Econometrica*. 1960. Vol. 28, No. 3. P. 497–520. DOI: 10.2307/1910129
7. Gurobi Optimization, LLC. Gurobi Optimizer Reference Manual. Version 11.0. 2024. URL: <https://www.gurobi.com/documentation/>
8. Cornuéjols G. Validine qualities formixed integer linear programs. *Mathematical Programming*. 2008. Vol. 112, No. 1. P. 3–44. DOI: 10.1007/s10107-006-0086-0
9. Bertsekas D. P. *Dynamic Programming and Optimal Control*. 4th ed. Vol. 1. Belmont: Athena Scientific, 2017. 576 p. ISBN 978-1-886529-43-4
10. Zhao C., Wang J., Watson J. P., Guan Y. Multi-stage robust unit commitment considering wind and demand response uncertainties. *IEEE Transactionson Power Systems*. 2013. Vol. 28, No. 3. P. 2942–2951. DOI: 10.1109/TPWRS.2013.2244231
11. European Committee for Electrotechnical Standardization. EN 50160:2010 — Voltage characteristics of electricity supplied by public electricity networks. Brussels: CENELEC, 2010
12. Logenthiran T., Srinivasan D., Shun T. Z. Demand Side Management in Smart Grid Using Heuristic Optimization. *IEEE Transactionson Smart Grid*. 2012. Vol. 3, No. 3. P. 1244–1252. DOI: 10.1109/TSG.2012.2195686
13. Ben-Tal A., El Ghaoui L., Nemirovski A. *Robust Optimization*. Princeton: Princeton University Press, 2009. 576 p. ISBN 978-0-691-14368-2
14. Vardakas J. S., Zorba N., Verikoukis C. V. A Survey on Demand Response Programsin Smart Grids: Pricing Methods and Optimization Algorithms. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. 2015. Vol. 17, No. 1. P. 152–178. DOI: 10.1109/COMST.2014.2341586

МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ ДОСЛІДНИКА З СИСТЕМОЮ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Кривий С.Л., Дарчук Н.П.

Київський Національний університет імені Тараса Шевченка

MODEL OF INTERACTION BETWEEN A RESACHER AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE SYSTEM

Kryvyi S.L., Darchuk N.P.

Taras Shevchenko National University in Kyiv

Abstract. A model of interaction between a researcher, an autonomous system or a human is proposed. The structure of system includes three components: a Turing machine as a researcher, an artificial intelligence system

as an oracle, and an additional tape through which the Turing machine can ask questions to the oracle.

У зв'язку з широким ужитком систем штучного інтелекту (ШІ) і можливостями, які дають такі системи, виникають питання взаємодії дослідника-науковця, або автономної системи, або пересічного користувача з системою ШІ. В роботі пропонується спрощена формальна модель такої взаємодії, яка ґрунтується на двох машинах Тьюрінга (МТ), одна з яких моделює дослідника, а друга оракула і які взаємодіють між собою за допомогою допоміжної (оракульної) стрічки. На цю стрічку дослідник записує свої запити до оракула, а оракул записує свої відповіді на поставлені питання. Використовуючи таку модель, можна прослідкувати хід «мислення» дослідника і оракула.

Модель взаємодії. Схематично пропонується модель набуває такого вигляду:

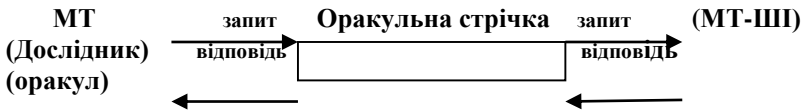


Рис. 1. Модель взаємодії

В цій спрощеній моделі, активний об'єкт виконує свої дослідження і дістає можливість спілкуватися з оракулом, який може бути машиною Тьюрінга, якщо активний об'єкт і система ШІ виступають як:

- програми, що взаємодіють між собою або
- автономна система та інформаційна система або
- агенти, які взаємодіють між собою тощо.

В такій моделі можна розглядати різного типу МТ (детерміновані, не детерміновані, багатострічкові) для дослідника і оракула. Зрозуміло, що цю модель можна розпаралелювати, дублюючи або створюючи нові активні об'єкти, або мати доступ не до однієї системи ШІ, як оракула, а до декількох таких систем як оракулів і т. п.

Основне завдання, яке повинен виконувати оракул, – це поповнення додатковими фактами (в разі їх існування) системи баз знань, баз даних, систем доведення теорем у формальних логічних теоріях, поповнення словників, словосполучень, тезаурусів, систем перевірки суперечності або несуперечності множини фактів (диз'юнктив) тощо. Всі перераховані області відіграють важливу роль у успішному існуванні сучасної технологічно розвинутої держави.

Але у застосуванні систем ШІ виникають проблеми точності, коректності і повноти отриманої інформації, її суперечності або несуперечності, відсутність обґрунтувань зробленого висновку тощо [1]. Тому в роботі є спроба зрозуміти логіку ШІ, перевірити коректність

отриманих відповідей і їх генерацію системою ШІ засобами формальної логіки.

Приклад застосування моделі. Розглянемо непростий приклад роботи запропонованої моделі в області аналізу текстів природної мови.

Завдання. При аналізі тексту був такий фрагмент (кольорові позначки введені нами для позначення фактів [2-8]): *«Пасажирський літак (А) зійшов з рейок. Ніхто не постраждав. Як повідомляють експерти, ймовірно авіалайнер натрапив на міліну».*

Рецензент, якому потрібно проаналізувати художній твір, звернувся до системи ШІ, оскільки, з точки зору нормальної людини, наведений фрагмент виступає безглуздим набором слів. Але у художній літературі допускаються різного роду образні порівняння, метафоричність, алегоричність та інші художні засоби. В даному прикладі рецензент (як МТ дослідник) починає консультиватися з системою ШІ (система GPT Chat як оракул) методом «питання/відповідь».

Питання перше. ЩО ТАКЕ ПАСАЖИРСЬКИЙ ЛІТАК?

Відповідь. ПАСАЖИРСЬКИЙ ЛІТАК — (А) ЦЕ ПОВІТРЯНЕ СУДНО, ПРИЗНАЧЕНЕ ДЛЯ (Р1) ПЕРЕВЕЗЕННЯ ЛЮДЕЙ (ПАСАЖИРІВ) І ЇХ БАГАЖУ. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ Й СКЛАДОВІ:

- ПРИЗНАЧЕННЯ: (Р2) РЕГУЛЯРНІ Й ЧАРТЕРНІ ПЕРЕВЕЗЕННЯ ПАСАЖИРІВ НА КОРОТКІ, СЕРЕДНІ АБО ДАЛЕКІ ВІДСТАНІ.
 - КОНСТРУКЦІЯ: ФЮЗЕЛЯЖ (ПАСАЖИРСЬКА КАБІНА), КРИЛА, ХВОСТОВЕ ОПЕРЕННЯ, ШАСІ, ДВИГУНИ.
 - САЛОН: МІСЦЯ ДЛЯ ПАСАЖИРІВ, БАГАЖНІ ВІДСІКИ, КАБІНА ЕКІПАЖУ (ЛІТАК) З СИСТЕМАМИ БЕЗПЕКИ Й КОМФОРТОМ (СИДІННЯ, ТУАЛЕТИ, КУХНІ, РОЗВАГИ).
 - ТИПИ ЗА ДАЛЬНІСТЮ: (Р3) РЕГІОНАЛЬНІ (МАЛІ, ДЛЯ КОРОТКИХ МАРШРУТІВ), СЕРЕДНЬОГО РАДІУСУ ДІЇ, ДАЛЕКОМАГІСТРАЛЬНІ (ДЛЯ МІЖКОНТИНЕНТАЛЬНИХ РЕЙСІВ).
 - ТИПИ ЗА КОНСТРУКЦІЄЮ: ТУРБОГВИНТОВІ, ТУРБОРЕАКТИВНІ (ПАСАЖИРСЬКІ РЕАКТИВНІ), ВУЗЬКО- І ШИРОКОФЮЗЕЛЯЖНІ.
 - БЕЗПЕКА Й РЕГУЛЮВАННЯ: ПІДЛЯГАЮТЬ АВІАЦІЙНИМ СЕРТИФІКАЦІЯМ, ТЕХНІЧНОМУ ОБСЛУГОВУВАННЮ, ПРАВИЛАМ ЕКСПЛУАТАЦІЇ Й КОНТРОЛЮ АВІАЦІЙНИХ ОРГАНІВ.
- ПРИКЛАДИ: BOEING 737 (РЕГІОНАЛЬНО/СЕРЕДНІЙ), AIRBUS A320 (СЕРЕДНІЙ), BOEING 777 АБО AIRBUS A350 (ДАЛЕКОМАГІСТРАЛЬНІ).

Питання друге. ЧИ МОЖЕ ПАСАЖИРСЬКИЙ ЛІТАК ЗІЙТИ З РЕЙОК?

Відповідь. КОРОТКО — ТАК, (Р4) ПАСАЖИРСЬКИЙ ЛІТАК МОЖЕ «ЗІЙТИ З РЕЙКИ», ЯКЩО ПІД НИМ РОЗУМІТИ (Q1) ІНЦИДЕНТ НА ЗЛІТНО-ПОСАДКОВІЙ СМУЗІ (RUNWAY EXCURSION) — (Q2) ВІЇЗД ЗА МЕЖІ АБО

(Q3) ЗУПИНКА ПОЗА СМУГОЮ, АБО **(Q4)** ПРОБІГ ЗА ЇЇ КІНЕЦЬ (OVERRUN).

ЦЕ ВІДБУВАЄТЬСЯ РІДКО, АЛЕ ТРАПЛЯЄТЬСЯ.

ТИПОВІ ПРИЧИНИ

- ПОГОДНІ УМОВИ: СИЛЬНИЙ ВІТЕР, БОКОВИЙ ВІТЕР, СИЛЬНИЙ ДОЩ І АКВАПЛАНУВАННЯ, ОЖЕЛЕДИЦЯ.
- ПОМИЛКИ ПІЛОТА: НЕПРАВИЛЬНЕ ГАЛЬМУВАННЯ, ПОСАДКА З ВЕЛИКОЮ ШВИДКІСТЮ, НЕПРАВИЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В БОКОВОМУ ВІТРІ.
- ТЕХНІЧНІ НЕСПРАВНОСТІ: ПРОБЛЕМИ З ГАЛЬМАМИ, РЕВЕРСОРАМИ ТЯГИ, ДВИГУНАМИ.
- СТАН СМУГИ: ЗАБРУДНЕННЯ, ВОДА, НЕЗРУЧНА ДОВЖИНА СМУГИ.
- ВІДМОВА СИСТЕМ (НАПРИКЛАД, АНТИБЛОКУВАЛЬНОЇ ГАЛЬМІВНОЇ СИСТЕМИ).

ЗАХОДИ БЕЗПЕКИ І ЗАПОБІГАННЯ

- ПРОЄКТУВАННЯ СМУГ (ДРЕНАЖ, КАНАВКИ/GROOVING), АВАРІЙНІ ЗОНИ (EMAS) НА КІНЦЯХ СМУГ.
- ЖОРСТКІ ПРОЦЕДУРИ ДЛЯ ПІЛОТІВ І ДИСПЕТЧЕРІВ, МЕТЕОІНФОРМАЦІЯ.
- ТЕХНІЧНЕ ОБСЛУГОВУВАННЯ ЛІТАКА ТА СИСТЕМ ГАЛЬМУВАННЯ.
- ТРЕНУВАННЯ ЕКІПАЖІВ З ЕКСТРЕНИХ ЕВАКУАЦІЙ.

НАСЛІДКИ ДЛЯ ПАСАЖИРІВ

- ЧАСТО ІНЦИДЕНТИ ЗАКІНЧУЮТЬСЯ **(T1)** БЕЗ СЕРЬОЗНИХ ТРАВМ, АЛЕ МОЖЛИВІ ПОШКОДЖЕННЯ І ПОРАНЕННЯ ПІД ЧАС ЕВАКУАЦІЇ. СМЕРТЕЛЬНІ ВИПАДКИ ТРАПЛЯЮТЬСЯ РІДКО, АЛЕ БУВАЮТЬ.

ЩО РОБИТИ ЯК ПАСАЖИР

- СЛУХАЙТЕСЬ ІНСТРУКЦІЙ ЕКІПАЖУ, ТРИМАЙТЕ ПАСОК ПРИСТЕБНУТИМ ПІД ЧАС ЗЛЕТУ/ПОСАДКИ, ОЗНАЙОМТЕСЯ З ПЛАНОМ ЕВАКУАЦІЇ І ШЛЯХАМИ ВИХОДУ.

ЯКЩО ХОЧЕТЕ, МОЖУ НАВЕСТИ ПРИКЛАДИ ВІДОМИХ ІНЦИДЕНТІВ АБО ПОЯСНИТИ, ЩО РОБИТЬ АВІАКОМПАНІЯ/АЕРОПОРТ ДЛЯ ЗНИЖЕННЯ РИЗИКУ.

OPENAI GPT-5 MINI

Питання третє. *ЧИ МОЖЕ ПАСЖИРСЬКИЙ ЛІТАК ЗІЙТИ З РЕЙОК І НАТРАПИТИ НА МЛИНУ?*

Відповідь. КОРОТКО — ТАКЕ **(P5)** ТЕОРЕТИЧНО МОЖЛИВО, АЛЕ ДУЖЕ РИЗИКОВАНО Й МАЛОЙМОВІРНО ЯК ЗАПЛАНОВАНИЙ ВАРІАНТ.

ПОЯСНЕННЯ КЛЮЧОВИХ МОМЕНТІВ:

- **(S1)** ЯКЩО МОВА ПРО «СХОДЖЕННЯ З РУЛІЖНОЇ ДОРІЖКИ» НА ЗЕМЛЮ (ПОЛЯ, ПІСОК, МЛИНУ БЕРЕГОВОЇ СМУГИ) — ЛІТАК МОЖЕ ВИЇХАТИ ЗА МЕЖІ ЗЛІТНО-ПОСАДКОВОЇ СМУГИ

Й ЗУПИНІТИСЯ НА МІЛИНІ/ПЛЯЖІ. ЧАСТО ПРИ ЦЬОМУ ПОШКОДЖУЮТЬСЯ ШАСІ, ПІДКРИЛКА, ФЮЗЕЛЯЖ, МОЖЛИВІ ЗАЙМАННЯ І БЛОКУВАННЯ РУХУ. ВИЖИВАНІСТЬ ПАСАЖИРІВ ЗАЗВИЧАЙ ДОБРА ПРИ НИЗЬКИХ ШВИДКОСТЯХ, АЛЕ ПОШКОДЖЕННЯ ЛІТАКА ВЕЛИКІ.

- **(S2)** ЯКЩО МОВА ПРО ЦІЛЕСПРЯМОВАНУ ПОСАДКУ НА МІЛКОВОДІ/ПІСОК У ВОДІ (ТАК ЗВАНІЙ «ДИТЧИНГ» НА МІЛКОВОДІ) — ПЛОТИ У НАДЗВИЧАЙНИХ ВИПАДКАХ МОЖУТЬ СІДАТИ НА ВОДУ (ПРИКЛАД: US AIRWAYS 1549 У Р. ГАДСОН), АЛЕ ЦЕ ДУЖЕ СКЛАДНО. ПОСАДКА НА ДУЖЕ МІЛКУ ВОДУ, ДЕ ДНО ТОРКАЄТЬСЯ КОРПУСУ, МОЖЕ ПРИЗВЕСТИ ДО РИВКІВ, РОЗРИВІВ КОНСТРУКЦІЇ, ПРОБОЮ ДНИЩА, ЗАГОРЯННЯ АБО ПЕРЕКОСУ ЛІТАКА; ТАКОЖ МОЖЛИВЕ ШВИДКЕ ЗАТОПЛЕННЯ Й УСКЛАДНЕНА ЕВАКУАЦІЯ.

- ФАКТОРИ, ЩО ВИЗНАЧАЮТЬ РЕЗУЛЬТАТ: ШВИДКІСТЬ І КУТ ТОРКАННЯ, ГЛИБИНА Й ТИП ДНА (КАМІНЬ/ПІСОК/ГЛИНА), МАСА Й КОНСТРУКЦІЯ ЛІТАКА, СТАН ПОГОДИ Й ХВИЛЬ, НАЯВНІСТЬ РЯТУВАЛЬНИХ ЗАСОБІВ. ЛЕГКІ ПОШКОДЖЕННЯ ПРИ МАЛІЙ ШВИДКОСТІ — МОЖЛИВІ; ПРИ ВЕЛИКІЙ ШВИДКОСТІ — ШАНС КАТАСТРОФИ ВИСОКИЙ.

- ПРАКТИКА: ЕКІПАЖІ УНИКАЮТЬ ТАКОГО ЗАХОДУ, ВИКОНУЮТЬ АВАРІЙНІ ПРОЦЕДУРИ (ШУКАЮТЬ АЕРОДРОМ, РОБЛЯТЬ ДИТЧИНГ У ВОДІ ЗА ПОТРЕБИ), А РЯТУВАЛЬНІ СЛУЖБИ ГОТУЮТЬСЯ ДО ЕВАКУАЦІЇ.↔

ВИСНОВОК: ТЕХНІЧНО МОЖЛИВО, АЛЕ НАДЗВИЧАЙНО НЕБЕЗПЕЧНО ДЛЯ ЛІТАКА І РИЗИКОВАНО ДЛЯ ПАСАЖИРІВ — МОЖЛИВЕ ЛИШЕ В АВАРІЙНИХ СИТУАЦІЯХ, А НЕ ЯК НОРМАЛЬНА ПРОЦЕДУРА.

Формалізація речення-запиту. Запишемо запит у вигляді формул логіки висловлювань:

$$A \leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \quad \text{наш запит: } A \rightarrow P_4 \wedge P_5 \wedge T_1, \\ \text{де } P_4 = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 \vee Q_4, P_5 = S_1 \vee S_2.$$

АНАЛІЗ ШІ НАШОГО ЗАПИТУ: ОСКІЛКИ У ЗАПИТІ НЕ ЙДЕ МОВА ПРО $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, S_1, S_2$, ТО ШІ ПРИЙНЯВ ФОРМУЛУ

$$(A \rightarrow (\neg P_4 \wedge \neg P_5)) \leftrightarrow (\neg P_4 \wedge (\neg S_1 \wedge \neg S_2)) \\ \leftrightarrow (\neg Q_1 \vee \neg Q_2 \vee \neg Q_3 \vee \neg Q_4) \wedge (\neg S_1 \wedge \neg S_2)$$

ЗА ІСТИННУ І ВИРШИВ, ЩО АВТОР ЗАПИТУ ПОЄДНАВ НЕ ПОЄДНУВАНЕ (ТОМУ ЩО В ЗАПИТІ НЕ ОПИСАНА ЖОДНА СИТУАЦІЯ, ЗА ЯКОЇ СТАЄ МОЖЛИВИМ ПАСАЖИРСЬКОМУ ЛІТАКУ «ЗІЙТИ З РЕЙОК І СІСТИ НА МІЛИНУ»):

- ЛІТАКИ НЕ ПЛАВАЮТЬ І НЕ ЇЗДЯТЬ ПО РЕЙКАХ (ЗА

ВИНЯТКОМ ДУЖЕ СПЕЦИФІЧНИХ ВИПРОБУВАЛЬНИХ СТЕНДІВ, АЛЕ ЦЕ НЕ "ПАСАЖИРСЬКІ АВІАЛАЙНЕРИ").

• ЯКЩО ЛІТАК "СІВ НА МЛИНУ", ЦЕ ОЗНАЧАЄ, ЩО ВІН АБО ПЛИВ ЯК КОРАБЕЛЬ, АБО ЦЕ БУВ ГІДРОПЛАН. ПРОТЕ НАВІТЬ ГІДРОПЛАНИ НЕ "СХОДЯТЬ З РЕЙОК".

ТОЧНІШИЙ АНАЛІЗ ВІДПОВІДІ ВІД ШІ МАВ БИ БУТИ ТАКИМ, ЯКУ ДАЄ ФОРМУЛА МОДАЛЬНОЇ ЛОГІКИ:

$$\diamond (A \rightarrow \neg P_4 \wedge \neg P_5) \leftrightarrow (A \rightarrow (\neg P_4 \wedge \neg S_1 \wedge \neg S_2)),$$

ДЕ \diamond ОЗНАЧАЄ МОДАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР «ІНКОЛІ». ЦЕ ВІДПОВІДАЄ СИТУАЦІЯМ, ЯКІ ТЕОРЕТИЧНО МОЖЛИВІ І ШІ ЦЕ ЗНАХОДИТЬ У СВОЇХ БАЗАХ.

Висновок рецензента. Що з наведеного діалогу з системами ШІ отримав для себе рецензент? Перше, що він отримав це

– додаткову інформацію про пасажирські літаки і перевезення,

– факти, які приводять до ситуації, яка є у його запиті,

– необхідність додаткового аналізу художнього твору, де є контекст опису ситуації, яка фігурує в запиті на основі отриманої додаткової інформації.

Описана взаємодія рецензента і систем ШІ призводить до поповнення «бази знань» рецензента та глибшого аналізу художнього твору. В такому сенсі системи ШІ виступають помічниками дослідника, особливо у інтелектуальній творчій роботі. За наявності у дослідника бази знань, ця база поповнюється новими фактами, які розширюють можливості дослідника.

У запропонованій моделі показано взаємодію одного штучного інтелекту в рамках власних операцій людини, але в перспективі можлива складніша взаємодія між різними системами штучного інтелекту – колаборативний штучний інтелект, де будуть взаємодіяти великі мовні моделі, що дасть можливість аналізувати потокову інформацію і виявляти фактологічні неточності, алогічності, мовні помилки тощо.

Література

1. Харченко В.С., Яковлев С.Б., Веприцька О.Ю., Фесенко Г.В. Пояснений штучний інтелект як сервіс: алгоритми оцінювання характеристик. Ж. Кібернетика та системний аналіз. – 2026. - № 1. – С. 3-15

2. Hahn C., Schmitt F., Tilman J.J., Metzger N., Siber J., Finkbeiner B.. 2022. Formal specifications from natural language. arXiv:2206.01962v2 [cs.SE] 19 Oct 2022. P. 1-20.

3. Jurafsky D., Martin J. Language Processing, 2nd Edition 2nd Edition, Prentice Hall. 2008, USA, ASIN: 0131873210, ISBN-10: 9780131873216. 1024 p.

4. Poesia G., Goodman N. D. Peano: Learning Formal Mathematical Reasoning. *Phi-losophical Transactions of the Royal Society A*, Volume 381(Issue 2251), 2023. P. 1-26.
5. Lalwani, A., Kim, T., Chopra, L., Hahn, C., Jin, Z., Sachan, M. (2024). Autoformalizing Natural Language to First-Order Logic: A Case Study in Logical Fallacy Detection. *arXiv:2405.02318v3 [cs.CL]* 6 Mar 2025. P.1-17.
6. Rami Aly, Strong M., Vlachos A. 2023. QA-natver: Question answering for natural logic-based fact verification. In *The 2023 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*. Department of Computer Science and Technology University of Cambridge. P. 1-16.
7. Yuhuai Wu, Jiang A. Q, Wenda Li, Rabe M., Staats Ch., Jamnik M., Szegedy Cr. Autoformalization with Large Language Models. 36th Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS), <https://arxiv.org/abs/2205.12615> 35:32353–32368, 2022. P.1-44.
8. Sourati Zh., Venkatesh V. P. P, Deshpande D., Rawlani H., Ilievski P., Hông-Ân Sandlin, Mermoud A. 2022. Robust and explainable identification of logical fallacies in natural language arguments. *Knowledge Based Systems*, <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2023110418> 266:110418. P.1-27.

ІТЕРАЦІЙНИЙ ЛОГІКО-ЛІНГВІСТИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПРИРОДНОМОВНИХ ТЕКСТІВ

Сергій Кривий, Любов Гриднева, Микола Носенко
Київський Національний університет імені Тараса Шевченка

ITERATIVE LOGICAL-LINGUISTIC METHOD FOR ANALYSIS OF NATURAL LANGUAGE TEXTS

Sergii Kryvyi, Lubov Grydnieva, Mykola Nosenko
Taras Shevchenko National University in Kyiv

Abstract. A three-stage iterative method of extracting knowledge from natural language texts is proposed using linguistic, formal-logical, syntactic-semantic analysis and involving explanatory dictionaries, encyclopedias, and special literature, systems of AI. The main task of such analysis is to supplement the set of facts with new facts that are implicitly present in the text for successful formal-logical analysis.

Розглядається підхід до аналізу природномовного тексту шляхом ітераційного способу пошуку фактів та поповнення ними системи формально-логічного аналізу. На підставі результатів аналізу будується база знань (БЗ) з перевіркою виконуваності концептів і несуперечності БЗ на основі дескриптивних логік. У пропонованому підході виділено три етапи побудови БЗ.

На першому етапі виконується побудова множин концептів, фактів і відношень між концептами, які явно фігурують у тексті.

На другому етапі знайдені множини концептів поповнюються концептами, фактами і відношеннями, які з'являються в процесі перевірки виконуваності концептів та їхнього логічного аналізу.

На третьому етапі до БЗ додаються концепти, факти і відношення, добуті зі статей, тлумачних словників, енциклопедій, спеціалізованих словників, систем штучного інтелекту тощо.

Формальний логічний аналіз потребує логічної повноти множини знайдених фактів, оскільки в разі цієї неповноти методи такого аналізу стають незастосовними [1]. Розв'язання цієї проблеми вимагає поповнення БЗ фактами, яких бракує для успішного проведення логічного аналізу. Результати аналізу залежать від точності перекладу знайдених фактів на мову тієї чи іншої математичної логіки (вибір математичної логіки залежить від складності тексту). У разі повноти множини фактів логічний аналіз виконує перевірку на суперечність/несуперечність цієї множини фактів. Проблема неповноти виникає практично завжди, оскільки добути факти, як правило, завжди неповні. Це природно, тому що в тексті можуть фігурувати посилання на інші тексти, архівні дані, аудіо записи, інтерв'ю тощо. На допомогу приходять синтактико-семантичний аналіз тексту, що дає змогу використовувати тлумачні словники, словники аналізованого тексту, глибинні семантичні характеристики понять, термінів, словосполучень тощо [2].

Для логічного аналізу використовується сім'я дескриптивних логік, зокрема логіка ALC та її теоретико-множинна семантика [3,4]. Ці логіки будують застосуванням конструкторів до множин первинних концептів (CN) і відношень (RN). Основними конструкторами у ALC логіці є заперечення концепту – $\neg C$, перетин концептів – $C \cap D$, об'єднання концептів – $C \cup D$, квантори $\exists R.C$ і $\forall R.C$, де R – атомарна роль, C, D – довільні концепти.

У мовах дескриптивної логіки під **концептом** розуміють клас індивідних об'єктів, що можуть мати деякі прості властивості, які називають атрибутами [5]. Усі концепти мають наповнення (обсяг).

Між концептами вводяться бінарні відношення R_1, R_2, \dots, R_n , які характеризують зв'язки між ними. Концепти і відношення поділяють на атомарні і похідні. Атомарний концепт (відношення) – це первинний клас об'єктів (відношень), за допомогою яких визначаються нові концепти і відношення, які називають похідними [6]. Формалізація похідних концептів і їхні властивості описуються за допомогою термінологічних аксіом ($TVox$ – Terminological Vox) та фактів ($AVox$ – Assertion Vox).

Визначення 1. Термінологічною аксіомою називають вираз $C \sqsubseteq D$ або $C \equiv D$, де C, D – довільні концепти. Термінологією ($TVox$) називають скінченну множину термінологічних аксіом деякої предметної області.

Вираз $C \sqsubseteq D$ означає скорочення концепт C «включається» в концепт D , а вираз $C \equiv D$ – скорочення концепти C і D «еквівалентні». Системою

фактів $ABox$ називають скінченну множину A тверджень такого вигляду $a:C$ і aRb , де a, b – деякі індивіди, C – довільний концепт, R – довільне відношення.

Твердження $a:C$ і aRb означають, що індивід a належить концепту C , і що індивіди a, b зв'язані відношенням R відповідно.

Семантику логіки ALC визначає інтерпретація $I = (\Delta, f)$, де Δ – область інтерпретації, f – функція інтерпретації. Функція інтерпретації ставить у відповідність

– кожному атомарному концепту A підмножину A^f (його наповнення в області Δ $A^f \subseteq \Delta$);

– кожній атомарній ролі R – підмножину R^f (її наповнення в області Δ $R^f \subseteq A \times A$)

Інтерпретація I розповсюджується індукцією за побудовою концепту у такий спосіб:

– $\top^f = \Delta, \perp^f = \emptyset, \neg C^f = \Delta \setminus C^f$ (де $\top(\perp)$ – істинний (хибний) концепт);

– $(C \sqcup D)^f = C^f \sqcup D^f, (C \sqcap D)^f = C^f \sqcap D^f$;

– $(\exists R. C)^f = \{e \in \Delta \mid \exists d \in \Delta: (e, d) \in R^f \wedge d \in C^f\}$;

– $(\forall R. C)^f = \{e \in \Delta \mid \forall d \in \Delta: (e, d) \in R^f \rightarrow d \in C^f\}$.

Визначення 2. У дескриптивній логіці визначенням називають введення нового концепту за допомогою конструкторів і операцій цієї логіки через атомарні концепти та відношення і раніше визначені (похідні) концепти та відношення.

Термінологію T називають системою визначень, якщо всі її аксіоми мають вигляд $A \equiv C$, де A – атомарний, а C – довільний концепт, причому в T немає двох різних аксіом з однаковою лівою частиною. Самі аксіоми вигляду $A \equiv C$ називають визначеннями.

Аксіома $C \sqsubseteq D$ ($C \equiv D$) істинна за інтерпретації I , якщо $C^I \subseteq D^I$ ($C^I \equiv D^I$). I в такому випадку називають моделлю даної аксіоми, Інтерпретацію I називають моделлю термінології T , якщо вона є моделлю для всіх аксіом із T . Термінологія T називається **сумісною** або **виконуваною**, якщо вона має непорожню модель.

Концепт C виконується відносно термінології T , якщо існує модель I термінології T така, що $C^I \neq \emptyset$.

Нехай T – система визначень, поділимо атомарні концепти, які зустрічаються в T , на дві категорії: **базові** (атомарні, первинні), які не входять в ліву частину жодної з аксіом із T і **похідні** (що визначаються), які входять у ліву частину хоча б однієї аксіоми із T .

Базовою називають інтерпретацію J , яка інтерпретує базові концепти (і якої достатньо для повного визначення семантики).

Систему визначень T називають **коректною**, якщо для довільної базової інтерпретації J існує єдине розширення I , яке є моделлю термінології T .

Термінологія описує загальні знання про концепти і ролі, але потрібні і знання про конкретні індивіди: якому класу належить індивід, якими відношеннями (ролями) вони зв'язані між собою. Це виконується в тій частині бази знань, яку називають системою фактів про індивіди або *АВох*. Із цією метою, крім множини *CN* атомарних концептів і множини *RN* атомарних ролей, тобто імен для класів і відношень, вводять також скінченну множину *IN* імен індивідів. Факти про індивідів є двох типів: твердження про належність індивіда *a* до концепту *C* (*a:C*) і твердження про зв'язок двох індивідів *a* і *b* роллю *R* (*aRb*).

Семантика *АВох* визначається за допомогою інтерпретації $I=(\Delta, f)$. Факт *a:C* або *aRb* справедливий в інтерпретації *I*, якщо $a^I \in C^I$ або $(a^I, b^I) \in R^I$. У такому випадку інтерпретацію *I* називають **моделлю** цього факту. Інтерпретацію *I* називають *моделлю системи фактів А*, якщо вона є моделлю всіх фактів з *A*. *АВох* називають *виконуваним* у термінології *T*, якщо *A* має модель (яка одночасно є моделлю термінології *T*).

Визначення 3. *Базою знань (БЗ)* називають пару $K=(T,A)$, де *T* – довільна термінологія (*TВох*), а *A* – довільна система фактів (*АВох*). Інтерпретацію *I* називають *моделлю бази знань K*, якщо *I* є моделлю *T* і *A*. *БЗ* називають *виконуваною* або *несуперечною*, якщо вона має непорожню модель.

Факт a (вигляду *a:C* або *aRb*) впливає з *K*, якщо *a* виконується в довільній моделі *I* бази знань *K*.

Факт a (вигляду *a:C* або *aRb*) впливає з *K*, якщо *a* виконується в довільній моделі *I* бази знань *K*.

Проілюструємо роботу такого аналізу на конкретному прикладі[5]:
«Перший саксофон створив А. Сакс у 1841 році. Цей мідний духовий язичковий інструмент виготовляють із латуні або срібла. Саксофон має конічний ствол з широкою мензурою, клювоподібний мундштук з одинарною тростиною та аплікатуру, подібну до гобою і флейти.»

Перший етап аналізу. Аналіз наведеного тексту дозволяє виділити атомарні концепти (*CN*), ролі між ними (*RN*) та іменовані індивіди (*IN*), які явно фігурують у тексті.

CN = ІНСТР ∪ ЧАСТ ∪ МАТ ∪ ЯКОСТІ ∪ ОСОБА ∪ ЧАС,
де *ІНСТ* = {МузІнстр, ДуховийІнстр, МіднийДуховий,

ЯзичковийДуховий, Саксофон, Гобой, Флейта};

ЧАСТ = {ЧастинаІнстр, Мундштук, Тростина, Ствол, Мензура};

МАТ = {Метал, Латунь, Срібло},

ЯКОСТІ = {Конічний, Широкий, Клювоподібний, Одинарний},

ОСОБА = {Винахідник}, *ЧАС* = {Рік}.

N = {маєВинахідника, маєРікВинаходу, маєЯкість, виготовЗ,
маєЧастину, маєСхожуАплікатуру}.

IN = {перший_саксофон, а_сакс, рік_1841}.

Термінологія \mathcal{T}_1 . На основі вилучених концептів і ролей будемо термінологію, що описує ієрархію понять і структурні властивості інструментів.

ДуховийІнстр \sqsubseteq МузІнстр;
 МіднийДуховий, ЯзичковийДуховий \sqsubseteq ДуховийІнстр;
 Мундштук, Тростина, Ствол, Мензура \sqsubseteq ЧастинаІнстр;
 Латунь, Срібло \sqsubseteq Метал;
 МеталевийІнстр \equiv МузІнстр \sqcap
 \forall виготовЗ.Метал \sqcap \exists виготовЗ.Метал;
 ВинайденийІнстр \equiv МузичнийІнстр \sqcap
 \exists маєВинахідника.Винахідник \sqcap \exists маєРікВинаходу.Рік;
 \exists маєСхожуАплікатуру.Флейта;
 КлювоподібнийМундштук \equiv Мундштук \sqcap \exists маєЯкість.Клювоподібний;
 ОднаТростина \equiv Тростина \sqcap
 \exists маєЯкість.Одинарний;
 КонічнийСтвол \equiv Ствол \sqcap \exists маєЯкість.Конічний;
 ШирокаМензура \equiv Мензура \sqcap
 \exists маєЯкість.Широкий;
 ОднотростинневийДуховий \equiv ДуховийІнстр
 \sqcap \exists маєЧастину.ОднаТростина;
 Саксофон \sqsubseteq МіднийДуховий \sqcap ЯзичковийДуховий \sqcap
 МеталевийІнстр \sqcap ВинайденийІнстр \sqcap СхожийЗаАплікатурою
 \sqcap ОднотростинневийДуховий
 \sqcap \exists маєЧастину.КлювоподібнийМундштук
 \sqcap \exists маєЧастину.КонічнийСт
 \sqcap \exists маєЧастину.ШирокаМензура
 \sqcap \forall виготовленийЗ. (Латунь \sqcup Срібло);

Система фактів \mathcal{A}_1 фіксує конкретні відомості з тексту:

$$\mathcal{A}_1 = \{ \text{перший_саксофон:Саксофон, а_сакс:Винахідник,} \\ \text{маєРікВинаходу(перший_саксофон, рік_1841)} \}$$

Для отриманої бази знань $\mathcal{K}_1 = (\mathcal{T}_1, \mathcal{A}_1)$ можна побудувати інтерпретацію \mathcal{I} , що є її моделлю, оскільки аксіоми \mathcal{T}_1 задають лише ієрархію концептів та екзистенційні обмеження й не накладають суперечних вимог на індивіди з \mathcal{A}_1 . Отже, база знань \mathcal{K}_1 є несуперечною.

Другий етап аналізу. Зафіксувавши термінологію \mathcal{T}_1 і факти \mathcal{A}_1 у вигляді БЗ \mathcal{K}_1 , шукаємо нові факти як логічні наслідки з вже зафіксованих. З аксіом для концепту "Саксофон" та аксіом включень виводимо нові факти про індивіда "перший_саксофон". Позначимо через \mathcal{A}_2 розширення \mathcal{A}_1 всіма виведеними фактами:

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cup \{ \text{перший_саксофон:МіднийДуховий,} \\ \text{перший_саксофон:ЯзичковийДуховий, ... } \}.$$

Оскільки всі виведені факти є логічними наслідками \mathcal{K}_1 , отримана база знань $\mathcal{K}_2 = (\mathcal{T}_1, \mathcal{A}_2)$ залишається несуперечною.

Третій етап аналізу. На цьому етапі уточнюємо та розширюємо множину концептів БЗ використовуючи енциклопедії й спеціалізовану літературу[6,7]. У музикознавстві духові інструменти поділяють на дерев'яні та мідні за способом звукоутворення, інструменти з одинарною тростиною належать до дерев'яних духових. На основі отриманої інформації розширимо множину концептів CN новим атомарним концептом "*ДеревДуховий*" і поповнимо \mathcal{T}_1 такими аксіомами:

$$\begin{aligned} \text{ДеревДуховий} &\sqsubseteq \text{ДуховийІнстр}; \\ \text{ОднотростинневийДуховий} &\sqsubseteq \text{ДеревДуховий}; \text{МіднийДуховий} \sqsubseteq \text{ДеревДуховий} \\ \text{ДеревДуховий} &\sqsubseteq \perp. \end{aligned}$$

Поповнену термінологію позначимо як \mathcal{T}_2 . Позначимо $\mathcal{K}_3 \models \alpha$, якщо факт α випливає з бази знань $\mathcal{K}_3(\mathcal{T}_2, \mathcal{A}_2)$. Визначивши логічні наслідки з \mathcal{T}_2 та \mathcal{A}_2 , для факту "*перший_саксофон:Саксофон*" отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_3 &\models \text{перший_саксофон:МіднийДуховий}; \\ \mathcal{K}_3 &\models \text{перший_саксофон:ОднотростинневийДуховий}; \\ \mathcal{K}_3 &\models \text{перший_саксофон:ДеревДуховий}; \\ \mathcal{K}_3 &\models \text{перший_сакс:} \perp \end{aligned}$$

Останній крок означає, що для побудови моделі бази знань \mathcal{K}_3 в інтерпретації \mathcal{I} має виконуватися $\text{перший_сакс}^{\mathcal{I}} \in \perp^{\mathcal{I}}$. Отже, \mathcal{K}_3 не має моделі й є суперечною.

Таким чином, завдяки ітераційному методу аналізу було виявлено суперечність у початковому фрагменті тексту, який потребує перегляду.

Література

1. Kryvyi S., Darchuk N., Skrypnyk T. Analyzing natural languages: antonyms, contradiction, ontologies. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 59, № 2, March, 2023. pp. 177-189 .

2. Гриднева Л.М. Логічний аналіз термінологічних словників і наукових текстів. Київ. – НТУУ «Київський політехнічний інститут». – 2019. – 12 с.

3. F. Baader, D. Calvanese, D. L. McGuinness et al. The Description Logic Handbook. – Cambridge: University Press, 2010. – 601 p.

4. Кривий С.Л. Елементи неklasичної математичної логіки. – Київ:ВПЦ «Кафедра». – 2026. – 608 с.

5. Юцевич Ю.Є. Музыка: словник-довідник [Електронний ресурс]. –

Режим

доступу: <http://term.in.ua>.

6. Сюта Б.О. Музичні інструменти [Електронний ресурс] // Енциклопедія Сучасної України / Інститут енциклопедичних досліджень НАН України. – Т. 22. – 2020. – Режим доступу: <https://esu.com.ua/article-69934>.

7. Adler S. The Study of Orchestration. – 2nd edition. – New York: W.W. Norton & Company, 1989. – 640 p.

ІЗОМЕТРИЧНІ ЦИКЛИ НЕСЕПАРАБЕЛЬНОГО ГРАФА

Сергій Курапов, Максим Давидовський
*Запорізький національний університет, КЗ «Запорізький обласний
інститут післядипломної педагогічної освіти» ЗОР*

ISOMETRIC CYCLES OF A NON-SEPARABLE GRAPH

Sergey Kurapov, Maxim Davidovsky
*Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia Institute of Postgraduate
Pedagogical Education*

Abstract. A topical problem in Graph theory is the development of invariant descriptions of the structure of a graph, which are independent of the numbering of vertices. Classical approaches based on the analysis of adjacency matrices or spectral characteristics do not provide a complete invariant for solving isomorphism and automorphism problems due to the existence of spectrally invariant non-isomorphic graphs. An alternative approach is based on the cyclomatic properties of a graph, in particular, on the selection of a subset of isometric cycles. The aim of this study is to systematize the properties of isometric cycles of non-separable graphs and justify their role in constructing invariants, solving graph isomorphism, automorphism, and topological drawing problems.

Актуальною проблемою теорії графів є розробка інваріантних описів структури графа, незалежних від нумерації вершин. Класичні підходи, що базуються на аналізі матриць суміжності або спектральних характеристик, не забезпечують повного інваріанту для розв'язання задач ізоморфізму та автоморфізму через існування спектрально незмінних неізоморфних графів. Альтернативний підхід ґрунтується на цикломатичних властивостях графа, зокрема на виділенні підмножини ізометричних циклів. Метою роботи є систематизація властивостей ізометричних циклів несепабельних графів та обґрунтування їх ролі для побудови інваріантів, розв'язання задач ізоморфізму, автоморфізму та топологічного рисунка графа.

Означення 1. Несепарабельний граф – це зв’язний неорієнтований граф без мостів, точок спряження, петель, кратних ребер та вершин з валентністю менше трьох [1].

Означення 2. Ізометричним циклом у зв’язному неорієнтованому несепарабельному графі називається простий цикл, для якого найкоротший шлях між будь-якими двома його вершинами в графі складається з ребер цього циклу [1, 2].

Іншими словами, відстані між вершинами всередині циклу збігаються з відстанями в усьому графі.

Ізометричні цикли є окремим випадком ізометричних підграфів. Їхня характеристика полягає у тому, що для будь-яких двох несуміжних вершин циклу не існує маршруту меншої довжини, ніж маршрут у межах цього циклу.

Властивість 1. У повних графах множина ізометричних циклів збігається з множиною циклів мінімальної довжини (трикутників) [3].

Лема 1. Кільцева сума центральних розрізів графа з n вершинами є порожньою множиною [4].

Теорема 1. Для будь-якого несепарабельного графа лінійний підпростір квазіциклів має незалежну підмножину ізометричних циклів, потужність якої дорівнює цикломатичному числу графа $\nu(G) = m - n + 1$ [3].

Ця теорема обґрунтовує існування базису простору циклів, що складається лише з ізометричних циклів.

Побудова множини ізометричних циклів базується на аналізі мінімальних s, t -маршрутів для кожного ребра графа.

Алгоритм 1 (пошук в ширину).

1. Для кожного ребра k , що сполучає вершини s та t , видаляємо його з графа та виконуємо пряму й зворотну розмітку вершин алгоритмом пошуку в ширину.

2. Будуємо множини простих циклів C_k^1 та C_k^2 , що проходять через ребро k при прямій та зворотній розмітці.

3. Ізометричними циклами, що проходять через ребро k , є цикли, які належать перетину $C_k = C_k^1 \cap C_k^2$.

4. Загальна множина ізометричних циклів графа C_τ є об’єднанням C_k для всіх ребер.

Оцінка складності. Обчислювальна складність алгоритму становить $O(n^4)$, де n – кількість вершин [3].

Альтернативний підхід полягає в послідовному видаленні ребер з повного графа K_n з відповідною кільцевою сумою ізометричних циклів. Цей метод дає змогу будувати множину ізометричних циклів для довільного підграфа.

На основі множини ізометричних циклів C_τ вводяться числові характеристики:

– Вектор циклів за ребрами $P_e = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, де a_i – кількість ізометричних циклів, що проходять через ребро e_i .

– Вектор циклів за вершинами $= \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$, де b_j – кількість ізометричних циклів, що проходять через вершину v_j .

Ці вектори є інваріантами графа, тобто не змінюються при ізоморфних відображеннях.

Означення 3. Функціоналом Маклейна називається величина:

$$F(C) = \sum_{i=1}^m (s_i - 1)(s_i - 2) = \sum_{i=1}^m s_i^2 - 3 \sum_{i=1}^m s_i + 2m,$$

де s_i – кількість циклів, що проходять через i -те ребро [4]. Для базису Маклейна (плоского графа) $F(C) = 0$.

Кубічний функціонал Маклейна визначається як:

$$FP(C) = \sum_{i=1}^m a_i (a_i - 1)(a_i - 2) = \sum_{i=1}^m a_i^3 - 3 \sum_{i=1}^m a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m a_i$$

що використовується для оцінки планарності та виділення плоских конфігурацій [1].

Застосування до задач ізоморфізму та автоморфізму, Теорема Вітні. Два графи G та H з однаковою кількістю вершин і ребер ізоморфні тоді й тільки тоді, коли ізоморфні їх реберні графи $L(G)$ та $L(H)$ [5].

Ізометричні цикли реберного графа $L(G)$ є прообразами центральних розрізів та ізометричних циклів вихідного графа G . Це дозволяє побудувати інтегральний інваріант графа як комбінацію спектрів реберних розрізів W_s та реберних циклів T_c :

$$F_{es}(G) = F_w(\xi(G)) \& F_w(\zeta(G)) \& F_r(\xi(G)) \& F_r(\zeta(G)),$$

де ξ – кортежі ваг ребер, ζ – кортежі ваг вершин на різних рівнях [6].

Для задач автоморфізму ваги вершин, отримані з векторних інваріантів, визначають орбіти – підмножини вершин з однаковою вагою, які можуть переходити одна в одну при автоморфізмі [7]. Перестановки вершин здійснюються лише в межах цих орбіт, що значно зменшує перебір.

Топологічний рисунок графа. Обертання вершин σ (циклічний порядок інцидентних ребер) індукує систему простих циклів. Граф є планарним тоді й тільки тоді, коли існує базис простору квазіциклів, у якому кожне ребро належить не більш ніж двом циклам (критерій Маклейна) [8].

Алгоритм побудови топологічного рисунка.

1. Виділення максимально плоского суграфа шляхом вилучення мінімальної кількості ребер.

2. Побудова системи незалежних ізометричних циклів з нульовим значенням кубічного функціонала Маклейна (метод найшвидшого спуску, $O(n^6)$).

3. Введення додаткових (уявних) вершин у місцях перетину ребер для непланарних графів та застосування векторної алгебри перетинів для визначення перетинів проєкцій на координатно-базисну систему (КБС).

Висновки:

1. Ізометричні цикли утворюють базис підпростору циклів несепабельного графа, що має потужність, рівну цикломатичному числу.

2. Множина ізометричних циклів є інваріантом графа та слугує основою для побудови числових векторних інваріантів (спектрів реберних розрізів і циклів), необхідних для розпізнавання ізоморфізму.

3. Запропоновано поліноміальні алгоритми виділення ізометричних циклів складністю $O(n^4)$ та побудови інтегрального інваріанта, що дає змогу ефективно розв'язувати задачі ізоморфізму та автоморфізму графів.

4. Ізометричні цикли є ключовим елементом для побудови топологічного малюнка планарних і непланарних графів, визначення товщини графа та мінімальної кількості перетинів ребер.

5. Подальші дослідження спрямовані на застосування розробленого апарату для аналізу великих дискретних структур у задачах прикладної математики та проєкування.

Література

1. Kurapov, S. V., Davidovsky, M. V., & Tolok, A. V. (2020). Generating a topological drawing of the flat part of a nonplanar graph. *Scientific Visualization*, 12(1), 90–102.

2. Kavitha, T., Liebchen, C., Mehlhorn, K., Dimitrios, M., Rizzi, R., Ueckerdt, T., & Katharina, A. (2009). Cycle bases in graphs: Characterization, algorithms, complexity, and applications. *Computer Science Review*, 3(4), 199–243. <https://doi.org/10.1016/j.cosrev.2009.07.001>

3. Kurapov, S., & Davidovsky, M. (2024). *Algorithmic methods of finite discrete structures. Topological graph drawing (Part I)* [Preprint]. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.21564>

4. Swamy, M. N. S., & Thulasiraman, K. (1981). *Graphs, networks, and algorithms*. John Wiley & Sons.

5. Whitney, H. (1932). Congruent graphs and the connectivity of graphs. *American Journal of Mathematics*, 54(1), 150–168. <https://doi.org/10.2307/2372022>

6. Kurapov, S. V., & Davidovsky, M. V. (2024). *Algorithmic methods of finite discrete structures. Isomorphism of nonseparable graphs* [Preprint]. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2406.08117>

7. Kurapov, S., & Davidovsky, M. (2024). *Algorithmic methods of finite discrete structures. Automorphism of nonseparable graphs* [Preprint]. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.12045>

8. Kurapov, S., & Davidovsky, M. (2025). *Algorithmic methods of finite discrete structures. Topological graph drawing (Part III)* [Preprint]. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2506.10936>

ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МОДЕЛЕЙ ОБЧИСЛЮВАНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕРЕЖ ПЕТРІ

Неведров Олексій

Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка

RESEARCH OF STRUCTURAL PROPERTIES FOR COMPUTATIONAL SYSTEM MODELS USING PETRI NETS

Nevedrov Oleksiy

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Abstract. *Formal verification of computational system using Petri net automata approach and linear Diophantine equations systems.*

Мережі Петрі є дуже потужним та корисним формалізмом, який дозволяє досліджувати та аналізувати обчислювальні системи різної складності. Зазвичай мережі Петрі використовують для моделювання паралельних чи розподілених обчислювальних систем. Оскільки мережі Петрі недетерміновані за своєю побудовою, це дозволяє ефективно їх використовувати для роботи з розподіленими системами, такими як мережеві протоколи передачі даних в комп'ютерних мережах, реплікація даних між серверами у розподілених базах даних, криптографічні протоколи, бізнес процеси, тощо. Мережі Петрі дозволяють досліджувати такі вкрай важливі властивості розподілених систем, як відсутність тупиків (deadlock absence, liveness), обмеженість ресурсів (boundless), досяжність (reachability), тощо.

Одним із напрямків використання мереж Петрі є *верифікація на моделі (model checking)* - підмножина технік та методів формальної верифікації програм, що дозволяють перевірити виконання певних умов, що виражаються логічними формулами, на формальній моделі програмної системи – її специфікації. Перевагою цього методу, є те, що на відміну від інших методів верифікації, він може повністю автоматизованим, а значить більш застосовним на практиці.

Робота зосереджена на дослідженні методів верифікації на моделях розподілених систем та їх структурних властивостей. При верифікації формальних моделей таких систем виникають наступні важливі проблеми мереж Петрі:

- еквівалентності
- досяжності
- оберненості
- живості
- обмеженості
- (стаціонарної) повторюваності
- і т.д.

Особливою є *проблема досяжності* – питання про існування скінченного виконання мережі яка призводить до бажаного маркування з

початкового. Ця задача є особливо важливою для верифікації на моделі, оскільки її розв'язання дозволяє знайти та локалізувати потенційні помилки моделі.

Формально мережу Петрі можна представити як впорядковану четвірку $PN = (P, T, F, W)$, де P – скінченна множина місць, T – скінченна множина переходів, $F \subseteq P \times T \cup T \times P \rightarrow \mathbb{N}$ – відношення переходів, $W: F \rightarrow \mathbb{N}$ – вагова функція, $P \cap T = \emptyset$.

Маркуванням (*marking*) мережі Петрі називається довільне відображення $M: P \rightarrow \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ яке ставить у відповідність кожному місцю мережі $p \in P$ певну невід'ємну цілу кількість фішок. Якщо певним чином пронумерувати всі місця мережі $E: \mathbb{N} \rightarrow P$, то можна визначити вектор маркування як вектор $\bar{M} = (M(E(i)) | i = \overline{1, n})^T$. Мережа Петрі для якої задана початкове маркування називається *розміченою (labeled)* та позначається як $PN = (P, T, F, W, M_I)$, де M_I – початкове маркування.

Довільний перехід $t \in T$ називається *збудженим*, якщо для поточної маркування мережі виконується умова: $\forall i \in \overline{1, n}: \bar{M}_i \geq F(E(i), t) = F(p_i, t)$. Збуджений перехід може спрацювати або не спрацювати, в залежності від існування інших збуджених переходів, але існує принаймні один такий перехід то обов'язково має спрацювати один з них. Якщо позначити за M^{new} – маркування мережі після спрацювання переходу, а за M^{old} – маркування до спрацювання, то при спрацювання збудженого переходу t виконується рівності:

$$\begin{aligned} \forall p_- \in P: (p_-, t) \in F &\Rightarrow M^{new}(p_-) = M^{old}(p_-) - F(p_-, t); \\ \forall p^+ \in P: (t, p^+) \in F &\Rightarrow M^{new}(p^+) = M^{old}(p^+) + F(t, p^+). \end{aligned}$$

Візуально розмічена мережа Петрі представляється у вигляді дводольного зваженого орієнтованого графа $G_P = (S, F, W, M)$, де $S = P \cup T, P \cap T = \emptyset$ – множина вершин графа, причому вершини-місця зображуються колом, а вершини-переходи – прямокутниками; F – множина ребер графа; $W: F \rightarrow \mathbb{Z}^+$ – функція ваг ребер графа; M – функція маркування вершин графа, значення якої для кожного місця позначаються відповідною кількістю маркерів всередині кожної вершини.

Для роботи з мережами Петрі набагато зручніше користуватися не множинним, а матричним поданням мережі Петрі. Якщо певним чином занумерувати всі місця та переходи – $E_p: \mathbb{N} \rightarrow P$, $E_t: \mathbb{N} \rightarrow T$, то можна подати МП таким чином:

$$\begin{aligned} PN &= (W_-, W_+, \bar{M}_0), \\ W_- &= (W(p_i, t_j))_{ij}, W^+ = (W(t_j, p_i))_{ij}, \\ p_i &= E_p(i), t_j = E_t(j), \\ i &= \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, \\ n &= |P|, m = |T|, \end{aligned}$$

де W_- матриця інцидентності всіх вхідних дуг мережі Петрі, а W_+ – матриця інцидентності всіх вихідних дуг мережі Петрі. Тоді розмічену мережу Петрі можна представити трійкою $PN = (W_-, W^+, \bar{M}_0)$; $W^+, W^- \in M_{mn}(\mathbb{Z}^+)$; $\bar{M}_0 \in \mathbb{Z}^{+n}$, де $M_{nm}(\mathbb{Z}^+)$ – множина всіх матриць розмірності n на m над полем \mathbb{Z}^+ . Якщо позначити за $\bar{u}_t = (\delta_{ik}, k = \bar{1}, \bar{m}), t = E_t(i)$ вектор-індикатор спрацювання переходу $t \in T$, то динаміку функціонування мережі Петрі можна описати наступною динамічною системою:

$$\begin{cases} \bar{M}^{k+1} = \bar{M}^k + (W^+ - W_-)\bar{u}_t^k, \\ \forall i \in \bar{1}, \bar{n}: \bar{M}_i^k \geq (W_- \bar{u}_t^k)_i, t \in T, \\ \bar{M}^0 = \bar{M}_0, \\ \bar{M} \in \mathbb{Z}^{+n}, \bar{u}_t^k \in \{0, 1\}^n, k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

Така система називається *рівнянням станів сітки Петрі*. Перше рівняння цієї системи це рекурентне співвідношення, що дозволяє обчислити наступний стан маркування мережі за попереднім. Друга нерівність описує умову збудженості переходу, та забезпечує недетермінованість функціонування мережі.

Для спрощення з системи іноді викидають другу нерівність у системі, щоб зробити рівняння детермінованим:

$$\bar{M}^{k+1} = \bar{M}^k + (W^+ - W_-)\bar{u}_t^k.$$

Це дозволяє за допомогою рекурентної підстановки рівняння обчислити будь-який вектор маркування МП за початковим:

$$\bar{M}^k = \bar{M}_0 + (W^+ - W_-) \sum_{i=0}^k \bar{u}_t^i$$

Якщо ввести позначення $\bar{\mu}^k = \sum_{i=0}^k \bar{u}_t^i$, та $W = W^+ - W_-$ то рівняння можна записати в спрощеному вигляді:

$$\bar{M}^{k+1} = \bar{M}_0 + W\bar{\mu}^k$$

Таке лінійне рівняння не дозволяє точно описати функціонування мережі, проте є корисною при дослідженні питання досяжності бажаного маркування, що дозволяє сформулювати необхідну умову досяжності маркування.

Якщо позначити через $M' \xrightarrow{t} M''$ факт спрацювання переходу $t \in T$ зі стану маркування M' у стан M'' , через $M^0 \xrightarrow{\sigma} M^k$ – послідовність

спрацювання переходів (послідовність виконання) $M^0 \xrightarrow{t_1} M^1 \xrightarrow{t_2} M^2 \rightarrow \dots \xrightarrow{t_k} M^k$, $\sigma = (t_i)$, $i = \overline{1, k}$, $t \in T$, то можна визначити *множину досяжних маркувань сітки*: $R_{PN}^{Post}(M_I) = \{M | \exists \sigma \in T^*: M_I \xrightarrow{\sigma} M\}$. Тоді за допомогою рівняння станів сітки можна сформулювати необхідну умову досяжності маркування M_f для розміченої мережі Петрі:

Теорема (необхідна умова досяжності маркування):

Кінцеве маркування \bar{M}_f є досяжною в МП з початковим маркуванням M_I тоді, і лише тоді, коли рівняння станів МП над кінцевою розмітка та початковим маркуванням має принаймні один ненульовий розв'язок:

$$M_f \in R_{PN}^{Post}(M_I) \Leftrightarrow \exists \bar{\mu} \in \mathbb{Z}^+ / \bar{0}, \sum_{k=0}^n \bar{\mu}_k = n: \bar{M}_f = \bar{M}_I + W\bar{\mu}.$$

Перевірка виконання цієї умови вимагає розв'язання *системи лінійних неоднорідних діофантових рівнянь* (СЛНДР) виду:

$$W\bar{\mu} = \bar{M}_f - \bar{M}_I$$

Розв'язання цього СЛНДР дозволяє знайти всі можливі вектори $\bar{\mu}$, які задають кількість необхідних спрацювань кожного переходу та відповіді на питання досяжності бажаного маркування і потенційно можливі послідовність виконання що призводять до неї. Чого розв'язки даної СЛНДР сказати не зможуть, так це точно необхідні визначити послідовність виконання мережі, до того ж зазвичай є нескінченна кількість розв'язків СЛНДР, оскільки розв'язки СЛНДР включає в себе лінійну комбінацію базисних розв'язків СЛОДР, що відповідають стаціонарним послідовностям виконання переходів у початкове маркування. В такому випадку нічого не залишається окрім як перебором шукати всі можливі маркування в мережі будуючи так званий орієнтований *граф досяжних маркувань* (*reachability graph*) з надією знайти там бажане маркування.

Проблемою такого методу є те, що МП дуже часто бувають необмежені, тому побудувати весь граф є неможливим. Поширеним методом роботи з такими МП є штучне обмеження значення маркування для кожного місця у МП. Таким чином розглядається не весь граф досяжності МП, а лише його частина. Це дозволяє аналізувати досяжні маркування МП за рахунок зменшення точності аналізу. Для такого аналізу зручно використовувати відомості з теорії автоматів. Проілюструємо це таким прикладом:

Нехай МП з початковим маркуванням задається наступним графом:

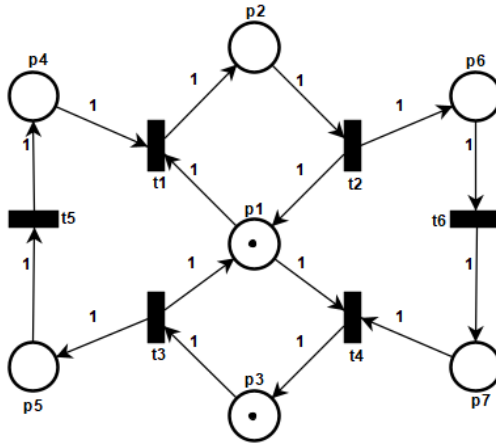


Рис. 1 – Приклад обмеженої мережі Петрі.

Всі місця та переходи мережі пронумеровані зв алфавітним порядком відносно їх назв. Тоді початкове маркування мережі задається вектором $\bar{M}_0 = (1,0,1,0,0,0,1)^T$. Припустимо нас цікавлять кінцеві маркування, що задаються векторами $\bar{M}_{f_1} = (1,0,1,0,0,0,0)^T$ та $\bar{M}_{f_2} = (1,1,0,0,0,0,0)^T$. Тоді матричне подання цієї МП виглядатиме наступним чином:

$$W_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідне рівняння станів прийме вигляд:

$$\begin{pmatrix} M(p_0) \\ M(p_1) \\ M(p_2) \\ M(p_3) \\ M(p_4) \\ M(p_5) \\ M(p_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ініціальний стан одночасно є і фінальним, то йому буде відповідати однорідний варіант цього рівняння. Враховуючи те, що загальний розв'язок СЛНДР включає в себе загальний розв'язок відповідного йому СЛОДР, достатньо розв'язати лише це рівняння для кінцевого маркування \bar{M}_{f_2} :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \end{pmatrix} = \bar{M}_{f_2} - \bar{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язавши це рівняння алгоритмом TSS [1], отримаємо наступний розв'язок:

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_1 + 1 \\ k_1 \\ k_1 + 1 \\ k_1 \\ k_1 + 1 \\ k_1 + 1 \end{pmatrix}, k_1 \in \mathbb{Z}^+.$$

Частинний розв'язок цієї СЛНДР відповідає кінцевому маркуванню \bar{M}_{f_1} а базисний розв'язок відповідної СЛОДР розмітці \bar{M}_{f_2} . Множина загальних розв'язків є необмеженою. Це означає, що можливі послідовностей виконання переходів включають в себе стаціонарно повторювані переходи, які можуть повторюватись нескінченно. Вже на цьому етапі можна дослідити більшість властивостей МП (наприклад, за допомогою P та T інваріантів [2]). Проте для більш глибокого дослідження краще будувати граф досяжних маркувань. З урахуванням початкової та кінцевих розміток він буде виглядати наступним чином:

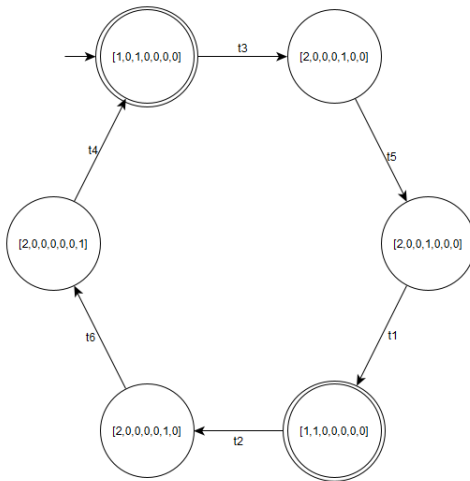


Рис. 2 – Граф досяжності мережі Петрі на рис. 1.

На рис. 2 стрілкою позначене початкове маркування, а двома концентричними колами кінцеві маркування. Цей граф можна інтерпретувати як граф певного скінченного ініціального X -автомата, у якому множина станів A співпадає з множиною досяжних маркувань $R_{PN}^{Post}(M_I)$, вхідний алфавіт X співпадає з множиною переходів мережі T , а функція переходів виражається через функцію переходів заданої МП PN наступним чином: $f = \{(p_1, t, p_2) | (p_1, t) \in F_{PN}, (p_2, t) \in F_{PN}; p_1, p_2 \in P; t \in T\}$. Ініціальному стану такого автомата відповідає початкове маркування мережі, а його фінальні стани відповідають кінцевим маркуванням.

Для такого автомата можна застосувати алгоритми аналізу, який побудує регулярну мову, яка акцептується цим автоматом. Наприклад, можна скористатись алгоритмом аналізу методом елімінації станів [3]. У результаті цього алгоритму граф спроститься до одного ініціального та одного фінального стану:

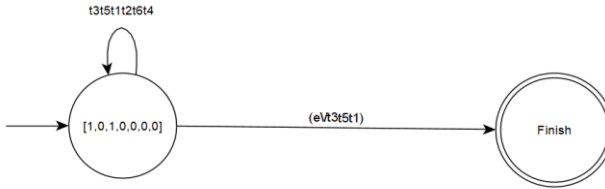


Рис. 3 – Граф досяжних маркувань після елімінації станів.

За цим графом нескладно побудувати відповідний йому регулярний вираз:

$$L(A_{PN}) = (t_1 t_5 t_1 t_2 t_6 t_4)^* \vee (t_1 t_5 t_1 t_2 t_6 t_4)^* t_3 t_5 t_1.$$

На практиці звичайно такі вирази можуть бути набагато складнішими та запутанішими. Побудований за графом досяжності автомат дозволяє не тільки перевірити послідовності виконань переходів до знайденої регулярної мови, але і виконувати різні операції над побудованими мовами різних МП.

Аналогічно можна сформулювати обернену проблему - задачу кодосяжності кінцевого маркування з бажаного маркування:

$$M_I \in R_{PN}^{Pre}(M_f), R_{PN}^{Pre}(M_f) = \{M | \exists \sigma \in T^*: M \xrightarrow{\sigma} M_f\}.$$

Для розв'язання оберненої задачі буде корисною така теорема:

Теорема (про існування оберненої МП):

Якщо для МП $PN' = (W_-, W^+, \bar{M}')$ виконується $\bar{M}'' \in R_{PN'}^{Post}(\bar{M}')$ то існує обернену до неї МП $PN'' = (W^+, W_-, \bar{M}'')$, що для неї справедливо, що $M_0 \in R_{PN''}^{Post}(\bar{M}'')$.

Ця теорема корисна тим, що дозволяє звести проблеми про досяжність кінцевого маркування з бажаного до проблеми досяжності бажаного маркування з початкового над оберненою МП. Таким чином, якщо МП може бути декілька різних початкових маркувань і одне кінцеве, то замість дослідження кожного початкового маркування окремо, достатньо розв'язати обернену задачу яка зводиться до вже відомої теорії.

Проблема досяжності тісно пов'язана з багатьма властивостями мереж Петрі. Наприклад повторюваність зводиться до розв'язання рівняння станів МП у випадку коли кінцеве та довільне початкове маркування співпадають, що в свою чергу зводиться до розв'язання СЛОДР. Ця властивість є *структурною властивістю* МП, тобто такою, що залежить виключно від структури МП і не залежить від початкового маркування МП. В свою чергу повторюваність пов'язана з живістю, оскільки вона є необхідною її умовою.

Автоматний підхід є широко поширеним методом для аналізу поведінки мереж Петрі, який дає більше можливостей та виразності порівняно з класичними методами аналізу структурних властивостей мереж Петрі.

Література:

1. Кривий, С. Л. (2014). Алгоритми розв'язання систем лінійних діофантових рівнянь у контексті проблеми здійсненності обмежень. *ЧІ. Інженерія програмного забезпечення*, (1), 6-19.
2. Cardoso, J., Valette, R., & Petri, R. (n.d.). Petri nets. <https://doi.org/10.34849/t30e-ax86>
3. Кривий, С. (2020). Скінченні автомати: Теорія, алгоритми, складність. Київ-Чепнівці. Букрек. 427 с.

АЛГОРИТМ ВИЯВЛЕННЯ МІНОРІВ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА СЕРЕД ГРАФІВ НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ З СИНТЕЗОВАНИХ З МІНОРІВ ПРОЕКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ, ЯКІ МАЮТЬ ПІДГРАФ ГОМЕОМОРФНИЙ $K_{3,3}$

Петренюк В. І., Петренюк Д. А.

*Центральноукраїнський національний технічний університет,
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.*

ALGORITHM FOR DETECTING KLEIN SURFACE MINORS AMONG GRAPHS OF UNORIENTED GENUS 3 SYNTHESIZED FROM PROJECTIVE PLANE MINORS THAT HAVE A HOMEOMORPHIC SUBGRAPH $K_{3,3}$

Petrenjuk V.I.^{1*}, Petrenjuk D.A.²

¹ *Central Ukrainian National Technical University*

² *V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv*

Abstract. The problem of detecting obstruction graphs and Klein surface minors among synthesized graphs of genus 3 from a pair of projective plane minor graphs with partial or generated subgraphs homeomorphic to $K_{3,3}$ is considered. Based on directed synthesis and the method of φ -transformation of pairs of projective plane minors with a homeomorphic subgraph $K_{3,3}$ and their embeddings in the Klein surface. The result is Theorem 1, along with a scheme of the algorithm for detecting Klein surface minors and diagrams in file with link:

<https://docs.google.com/document/d/1i9l2uaLfsl0B2DgT7LDQgkMsPW3rEblKSZ7Oa3N0ofY/edit?tab=t.0>.

В багатьох статтях досліджувалися структурні властивості графів-обструкцій заданої неорієнтованої поверхні як неорієнтованого 2-многовиду без країв та побудовані їхні прототипи як основу з якої, шляхом видалення чи стискання деякої множини ребер та, можливо, додавання нових ребер без зміни роду, утворюються графи-обструкції заданої поверхні. Так дослідження структури графів неорієнтованого роду виконувалися в [4,5,6]. Подібні питання розглядалися в [7,8,9]. В [10,11] досліджено структурні властивості графів як φ -образу площинного графа та, або простої зірки, або графа-обструкції проєктивної площини. В [12,13] наведено метод побудови всіх 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна. Основні визначення та позначення узяті з [1,2],[3].

Розглянемо **задачу** виявлення графів-обструкцій та мінорів поверхні Клейна серед графів роду 3, синтезованих з пари графів мінорів проєктивної площини, кожен з яких має частинний чи породжений підграф гомеоморфний $K_{3,3}$.

Тобто з побудованої скінченої множини 2-зв'язних графів неорієнтованого роду 3 треба не в перебірний спосіб відібрат ті, у яких всі ребра є суттєвими відносно роду при операціях видалення довільного ребра чи стискання його в точку, з використанням пари мінорів G_i, G_j проєктивної площини N_1 .

Оцінка числа графів-обструкцій поверхні Клейна в десятки тисяч наведена в [4,5,11,12]. Насамперед така оцінка обумовлена перебірним алгоритмом побудови всіх графів неорієнтованого роду 3 з подальшим видаленням чи стисканням в точку деяких ребер графів, які стали несуттєвими відносно роду.

Згідно [3] вважатимемо, що довільне мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N має комбінаторне подання через множину граничних замкнених шляхів, утворених при обході за часовою стрілкою ребер та вершин на границі кожної клітки з множини. Нехай задано мінімальне вкладення $f:G \rightarrow N$ графа G до неорієнтованої поверхні N , яке реалізує число досяжності t , $t_G(M,N)=t$, тобто є

найменша по включенню підмножина $\{s_i\}_{i=1}^t$ множини $S_G(N, f)$, де $S_G(N, f) = N \setminus f(G)$, складена з кліток на границях яких розташовано точки з множини M . Кожен граф G неорієнтованого роду k , $k \geq 1$, може подаватися наступним чином:

$$\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m),$$

як φ -образ графа H та зірки $St_n(g_0)$, приєднаної висячими вершинами g_i до точок $a_i \in H^0$, $M = \{a_i\}_{i=1}^m$. Множина M , $M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$, розміщується мінімальним вкладенням f' , $f': H \rightarrow N'$ на границях кліток s_1, s_2, \dots, s_t з множини $N' \setminus f'(H)$, де $t \geq 2, m \geq 2, i = 1, 2, \dots, m$. Аналогічно характеристикам вкладення графа до орієнтованої поверхні на підмножині $\{s_i, s_j, s_k\}$ множині $S_G(N, f)$, в [13] визначено мінімальну кліткову відстань заданої множини точок графа неорієнтованого роду. Так в [6] визначено характеристику θ , $\theta = 1$, множини коли ϵ , хоча δ , одна спільна точка на їхніх границях, яка є центром кліткової зірки, утвореної із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$ або визначено характеристику $\partial\theta$, $\partial\theta = 1$, якщо три пари границь цих кліток мають, принаймні, спільну точку.

Дослідження властивостей площинних та проєктивних графів мінімальних відносно заданої множини вершин із фіксованою клітковою довжиною і числом досяжності заданої підмножини множини точок потрібне для оцінки неорієнтованого роду утворених графів.

Наша мета полягатиме в направленому пошуку мінорів поверхні Клейна та має підґрунтя в [8, 16, 17], де зокрема знайдено 662 2-зв'язних мінори поверхні Клейна. Структура мінорів графів заданого роду виписана у статтях Робертсона і Сеймура та складається з чотирьох компонент. Подібну задачу про покриття множини вершин планарного графа не більш ніж заданим числом кліток розглянуто в [9, 10, 18].

Схема синтезу наступна. Синтез графа G з впорядкованої пари мінорів (G_1, G_2) проєктивної площини з заданими підграфами, гомеоморфними графу $K_{3,3}$, чи стягнутими до $K_{3,3}$, спочатку полягатиме в ототоженні кожної пари відповідних вершин заданих підграфів у відповідні вершини спільного підграфа K . До клітки чи пари кліток підграфа K може бути приклеєно не більше трьох лент Мебіуса та в утворені клітки вкладено граф $G \setminus K$ вкладенням, що може бути сумою мінімальних вкладень мінорів G_i , $i = 1, 2$, в поверхню Клейна N_2 , що

співпадають на спільно-му підграфі K . Неорієнтований род $\gamma(G)$ задовольняти ме нерівності $2 \leq \gamma(G) \leq 4$. Рівність $\gamma(G) = 3$ буде за умови сумісності графів G_1, G_2 , яка полягатиме спочатку в побудові множини $F(G_1, N_2)$ всіх тих неізоморфних мінімальних вкладень $f_i, f_i \in F(G_1, N_2)$, графа G_1 в поверхню Клейна, що задовольняють співвідношенню (*) теореми 1. Далі перевірка можливості продовження кожного f_i до вкладення підграфа $G_2 \setminus K$ в одну чи кілька кліток з множини $N_2 \setminus f_i(G_1 \setminus K)$, з приклеєними до них лентами Мебіуса. Перевірка має бут для всіх рідних варіантів приєднання підграфа $G_2 \setminus K$ до графа G_1 .

Теорема 1. Мають місце наступні твердження:

1. Для кожного породженого чи частинного підграфа H неорієнтованого роду $n-1$, де $H = G \setminus v$, $n=3$, 2-зв'язного мінора G неорієнтованого роду n , виконуються наступні співвідношення:

(*) Для довільної вершини v , $v \in G \setminus H$, кліткова довжина $d = d_H(M)$ множини точок $M = \{u_j\}_{j=1}^{|M|}$ графа H (з якими попарно отожднюються всячі вершини u_j з множини $St_G^0(v) \setminus \{v\}$) задовольняє рівнянню $d = n - 2$ та існує скінчена множина Fv , $Fv = \{fv_j\}_{j=1}^{|M|}$, де вкладення $fv_j: H \rightarrow N$, графа H в неорієнтовану поверхню N роду $n-1$

задовольняє умові: $(fv_j(u_j) \subset \partial s_1) \wedge (fv_j(M \setminus u_j) \subset \bigcup_{k=2}^{d+1} \partial s_k)$, де $s_i \in N \setminus fv_j(G \setminus (St_G^1(v) \cup \{v\}))$.

(**) кожне ребро e , $e \in H^1$, є критичним, при операції видалення ребра чи стискання його в точку, або відносно неорієнтованого роду $\gamma(G) = n$, або кліткової довжини множини точок M , $M = St_G(v) \setminus \{v\}$, при операції видалення довільної точки $x \in M$;

2. Якщо граф G синтезовано з пари сумісних по $K_{3,3}$ мінорів H_i, H_j неорієнтованого роду $n - 1$, (тобто є вкладення графа G в неорієнтовану поверхню роду n , подане як сума мінімальних вкладень мінорів H_i, H_j), то тоді граф G - може не бути граф-обструкцією неорієнтованого роду n , $n - 1 \geq 0$, можливо з деякими несуттєвими ребрами відносно роду при операції стискання ребра в точку;

3. Якщо G є міномом неорієнтованого роду n , $n = 3$, то кожна його вершина v задовольняє співвідношенню (*), виписаному для підграфів $G \setminus v$ роду менше n .

Доведення теореми 1 маємо намір опубліковано в журналі “Кібернетика та комп’ютерні технології” в статті авторів “Про синтез міномів проективної площини з підграфом чи частиною гомеоморфними $K_{3,3}$ ”.

На рис. 1 наведено приклад виконання умов (*) вкладеннями в поверхню Клейна теореми 1. На першій карті наведено міном $(C_3 \setminus 1 + St_5) + (D_4 \setminus 1 + St_4)$, де зірки мають сірі ребра та сірі центральні вершини.

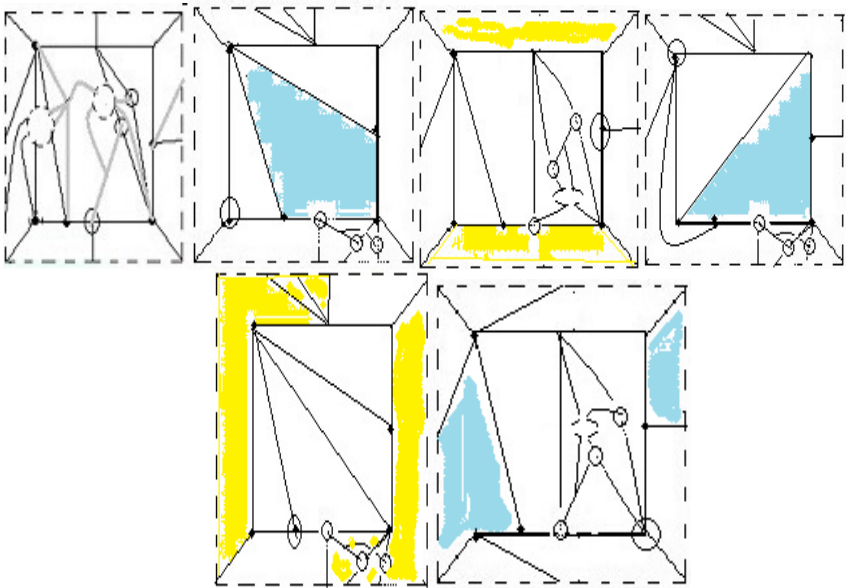


Рис. 1.

На рис. 2 наведено приклад коли не виконується умова теореми 1 для всіх ребер двох зірок з п'ятьма та чотирма сірими висячими ребрами, що приєднані до виділених двох множин вершин, які, відповідно, наведені жирно та обведених кружками. Не міном $(C_3 \setminus 1 + St_5) + (E_5 \setminus 5 + St_4)$ стане ним після видалення пари ребер та стискання в точку червоного ребра.

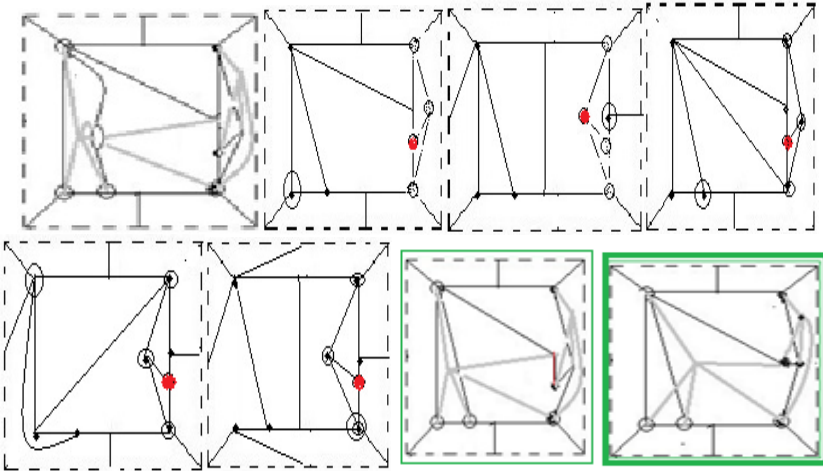


Рис.2.

Схематичний алгоритм має наступний вигляд:

Вхід . Синтезований граф G з пари мінорів G_i проєктивної площини , кожен з підграфом K гомеоморфним $K_{3,3}$ та виділеною зіркою $St_{|M_i|}(v_i)$ з множиною всіх висячих вершин M_i , де $v_i \in G_i^0 \setminus K^0$;

В циклі з параметром k від 1 до $|G^0 \setminus K^0|$ кроком 1 виконати дії:

1. $v := v_k$, де $v_i \in G_i^0 \setminus K^0$
2. Побудуємо множину F_1 всіх $|M_1|$ мінімальних вкладень f_j графа G_1 в поверхню Клейна N_2 , які розміщують на границях двох виділених граней $s_1(v_1)$, $s_2(v_1)$, $s_i(v_1) \in N_2 \setminus f(G_1)$ (що мають принаймні одну спільну точку на своїх границях) одну точку v та підмножину $M_i \setminus v$, відповідно, де $i=1,2$, $j=1, \dots, |G_1^0 \setminus K^0|$. Продовжуємо вкладення розташовуючи в середину однієї виділеної грані (з підмножиною $M_i \setminus v$ точок на границі), центр зірки та її ребра за винятком одного, яке розмішуватимемо на ленті Мебіуса, яку приклеїмо до обох виділених граней;
3. В циклі з параметром l від 1 до $|G_2^0 \setminus K^0|$ кроком 1 виконати:
4. $u_l := u_l$ де $u_l \in G_2^0 \setminus K^0$

5. Побудуємо вкладення f' графа $(G_2 \setminus K) \setminus St_{|M_2|}(u_1)$ в поверхню N_3 , яку подано через грані $s_1(u_1), s_2(u_1)$ множини $N_2 \setminus f(G_1)$ (можливо відмінних від виділених граней $s_1(v_1), s_2(v_1)$) з, принаймні, однією приклеєною лентою Мебіуса.
 6. Якщо для кожної зірки $St_{|M_2|}(u_1)$ з центром вкладеним в $s_1(u_1), s_2(u_1)$ є вкладення яке розміщує на границях цих виділених граней з, принаймні, однією спільною точкою на своїх границях) одну точку u та підмножину $M_2 \setminus u$, відповідно, то
 - тоді
 - виводимо «граф G є графом обструкцією поверхні Клейна»; вкладення $f'f$ буде мінімальним;
 - виводимо G - мінор поверхні Клейна в файл;
 - інакше
 - виводимо «граф G не є графом обструкцією бо має несуттєві ребра відносно роду при операції видалення»;
 - виходимо на кінець алгоритму.
 7. Підлягатимуть стисканню в точку ті ребра $e \in f'f(G)$ графа обструкції G поверхні Клейна, які заважатимуть розміщенню на границях двох кліток однієї точки з множини виділених точок, а всіх інших точок цієї множини на границі другої та утворюють підмножину T . В результаті стискання кожного з ребер підмножини T отримаємо мінор G поверхні Клейна.
 8. Кінець циклу з параметром l ;
 9. Кінець циклу з параметром k ;
- Кінець алгоритма.

Твердження А. Схематичний алгоритм коректний та лінійний.

Доведення. Основою алгоритма є теорема 1. Граф $K_{3,3}$ має одне неізоморфне мінімальне вкладення в проективну площину, тому підграф K гомеоморфний $K_{3,3}$ також. Переглянувши всі 2-з'язні мінори проективної площини побачимо, що відносно K будуть розмішуватися декілька, принаймні 4, простих зірок з центрами в тих вершинах мінорів проективної площини, які не задіяні при синтезі графа G . Таким чином матимемо не більше 16 варіантів розташування зірок відносно підграфа K мінорів проективної площини, яких менше 35. Тому число варіантів різних вкладень до поверхні Клейна не залежить від обраного синтезованого графа. Якщо мова йтиме про рід графа-обструкції Q як φ -образу графа G та квазізірки при ототоженні пар точок множини з висячими вершинами

квазізірки, то розумітимемо під клітковою відстанню довжини d скорочену довжину кліткового ланцюга чи дерева кліткового покриття, який покриває задану множину точок площинного графа. При обчисленні кліткової відстані заданої множини M графа точок графа треба для кожного неізоморфного вкладення G будувати розширення цього вкладення площинного графа G до вкладення в неорієнтовану поверхню N' – евклідову площину з, принаймні одною, стрічкою Мебіуса, на якій множина точок M є досяжною. Кінець схематичного доведення твердження А.

Література

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. Препринт ИМ АНУ, Київ, 1973. 383 с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ, Київ, 1970. 299 с.
3. Mohar B., Thomassen C. *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. <https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html>
4. Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894
5. Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory, Series B*. 46. 1989. P. 173–231.
6. Петренюк В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико математичне моделювання та інформаційні технології*. № 33. 2021. С. 105–109. Google Scholar
7. Bienstock D., Dean N. On obstructions to small face covers in planar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*. 55. 1992. P. 163–189. <https://doi.org/10.1016/0095-8956%2892%2990040-5>
8. Bienstock D., Monma C. L. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput.* 17. 1988. P. 53–76. <https://doi.org/10.1137/0217004>
9. Mohar B. Face Covers and the Genus Problem for Apex Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 82. 2001. P. 102–117. <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2026>
10. Mohar B. Apex graphs with embeddings of face-width three. *Discrete Mathematics*. 176. 1997. P. 203–210. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00363-9](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00363-9)
11. Петренюк В. І. О структуре плоских графов с заданным числом достижимости некоторого множества их точек. Депонированный рукопис на 51 стор, №2245-Ук86, 1986
12. В.І. Петренюк, Д.А. Петренюк, О.В. Оришака. Структура проективно площинних підграфів графів-обструкцій заданої поверхні. Кібернетика

та комп'ютерні технології. 2022, № 2. С. 1-20 DOI:10.34229/2707-451X.22.2.0

13. В.І. Петренюк, Д.А. Петренюк. Про алгоритм побудови 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, № 37 (2023): 72-74. <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/308>
14. Edwin R. van Dam, Jack H. Koolen, Hajime Tanaka. Distance-regular graphs, E-JC, DS22: Apr 15, 2016, <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/issue/view/Surveys>.
15. Bojan Mohar, Petr Škoda. Excluded minors for the Klein bottle I. Low connectivity case, Journal of Combinatorica, Volume 164, January 2024, Pages 299-320. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.10.002>
16. Bojan Mohar, Petr Škoda. Excluded minors for the Klein bottle II. Low connectivity case, Journal of Combinatorica, Volume 166, May 2024, Pages 80-108. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.12.006>.
17. В.І. Петренюк, Д.А. Петренюк. Про синтез мінорів проєктивної площини з підграфом чи частиною гомеоморфними $K_{3,3}$. Кібернетика та комп'ютерні технології 2026

ВИКОРИСТАННЯ АПАРАТУ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ ДЛЯ ОЦІНКИ ЯКОСТІ ВОДНИХ РЕСУРСІВ

Іван Половко, Микола Маляр, Маріанна Шаркаді
Ужгородський національний університет

THE USE OF FUZZY LOGIC FOR THE ASSESSMENT OF WATER RESOURCE QUALITY

Ivan Polovko, Mykola Malyar, Marianna Sharkadi
Uzhhorod National University

Abstract. The development of intelligent information systems is closely linked to artificial intelligence technologies and big data analysis. An important step in their improvement is the application of fuzzy mathematics to solve complex optimisation problems. Such tools allow for the formalisation of multi-level uncertainties and the effective processing of weakly formalised qualitative variables (in particular, the components of a region's image). The analytical framework thus established provides a solid foundation for the further integration of these models with modern digital platforms.

1. Вступ та актуальність дослідження.

Сучасні тенденції розвитку методів штучного інтелекту сприяють активній інтеграції інформаційних технологій у всі сфери людської

діяльності, зокрема в екологію. Ми спостерігаємо експоненційне зростання обсягів даних, які накопичуються в процесі екологічного моніторингу.

Проте проста наявність даних не вирішує проблеми. Для створення точних математичних моделей процесів, що протікають у складних екосистемах під впливом безлічі зовнішніх та внутрішніх факторів, критично необхідним є використання технологій ШІ. Їх ключова перевага — здатність формалізувати невизначеності, навчатися, накопичувати знання та ефективно їх застосовувати для розв'язання задач оптимізації та прийняття управлінських рішень.[1]

2. Архітектура інтелектуальної системи (ІС).

Запропоновано структуру ІС, що функціонує на двох рівнях (інформаційному та аналітичному) і використовує апарат нечіткої математики. Для виявлення прихованих закономірностей та обробки недовизначених знань в умовах екологічної невизначеності доцільно створювати інтелектуальні інформаційні системи. Методологічною основою нашої системи є системний аналіз. Функціонування ІС концептуально розділяється на два взаємопов'язані рівні:

- 1. Інформаційний рівень:** відповідає за пошук, збирання та зберігання сирих показників.
- 2. Аналітичний рівень:** забезпечує узагальнення, класифікацію, перетворення інформації та безпосереднє розроблення прогнозів і рекомендацій.

Оскільки експериментальні дані та експертні оцінки неминуче містять значну кількість шумів та невизначеностей, традиційні детерміновані підходи тут неефективні. Саме тому ми пропонуємо використовувати апарат нечіткої математики, який є найбільш пристосованим для відображення слабоформалізованих якісних змінних, якими і є складові екологічного іміджу регіону

Базові компоненти запропонованої ІС включають: базу показників суб'єкта дослідження, базу нормативно-методичних матеріалів, базу моделей відображення, базу методів обробки та ключове ядро — нечітку базу знань.

3. Екологічний контекст: джерела забруднення водних ресурсів.

Якість поверхневих вод формується під тиском комплексного антропогенного впливу: комунального, аграрного та промислового секторів, що вимагає системного підходу до моніторингу. Якість води — фундаментальна характеристика, що не є статичною. Вона постійно формується під впливом складної взаємодії природних процесів та антропогенного тиску. В Україні ми стикаємося з трьома основними, системними джерелами забруднення:

- **Комунально-побутові стічні води:** Застаріла інфраструктура водоканалів не справляється із сучасним хімічним складом стоків. Надходження фосфатів та синтетичних поверхнево-активних речовин (СПАР) провокує евтрофікацію водойм, дефіцит розчиненого кисню та деградацію водних екосистем.

- **Аграрний сектор:** Дифузне забруднення від інтенсивного використання мінеральних добрив. Нітрати та фосфати змиваються у ґрунтові води та річки, спричиняючи хімічне забруднення величезних площ.
- **Промислові скиди:** Металургія, хімічна та нафтопереробна галузі скидають важкі метали (мідь, цинк, свинець, ртуть) та феноли, які мають здатність до біоаккумуляції в харчових ланцюгах.

Крім того, проблема ускладнюється розмиттям меж між точковими та дифузними джерелами (наприклад, несанкціоновані врізки у зливові каналізації). Це вимагає від нашої ІС здатності виявляти приховані джерела впливу шляхом аналізу поступових просторово-часових змін якості води.

4. Нормативна база та класифікація показників.

Будь-яка математична модель потребує чіткого еталона для порівняння. На основі чинних методик екологічної оцінки ми виокремили 13 ключових індикаторів, які репрезентують різні аспекти стану екосистеми [2]:

1. **Кисневий режим та органічне забруднення:** Розчинений кисень (вміст O_2), біохімічне (БСК₅) та хімічне споживання кисню (ХСК). Це фундаментальні показники здатності водойми підтримувати життя.
2. **Біогенне забруднення:** Азот амонійний, азот нітратний та фосфор фосфатів. Вони є маркерами свіжого або старого забруднення та індикаторами ризику евтрофікації.
3. **Загальні фізико-хімічні показники:** Рівень *pH* та завислі речовини, які описують базові властивості водного середовища.
4. **Специфічні токсичні забруднювачі:** Нафтопродукти, свинець, ртуть, феноли та СПАР. Ці речовини є маркерами прямого промислового або комунального втручання і високотоксичні навіть у мікроконцентраціях.

Формування цієї матриці з 13 показників — це лише інформаційний базис. Справжній виклик полягає у тому, як саме ми синтезуємо ці різномірні дані в єдину комплексну оцінку. Традиційне використання нормативної бази спирається на «жорсткі» межі, де навіть мінімальне відхилення одного специфічного показника (наприклад, на соті долі міліграма) автоматично переводить усю водойму в найгірший клас якості. Такий детермінований підхід є надто грубим і не відображає реального стану речей у складних водних екосистемах. Саме тому, щоб забезпечити гнучку, об'єктивну та математично коректну інтеграцію всіх цих параметрів, ми відмовляємося від класичних порогових оцінок і переходимо до використання теорії нечітких множин.

5. Математичне моделювання та теорія нечітких множин.

Класичний підхід до оцінювання спирається на жорсткі порогові значення та так званий "принцип граничного фактору", коли загальний клас якості визначається виключно за найгіршим показником. Це

надзвичайно консервативний метод: якщо 12 параметрів ідеальні, а один випадає, водойма бракується цілком. Такий підхід не враховує реальної комплексності екосистем.

Вода в природі не буває абсолютно "чистою" або дискретно "брудною". Тому ми застосовуємо апарат теорії нечітких множин.[3] Основою цього процесу є фазифікація — перетворення точного числового вимірювання у набір ступенів належності до заданих лінгвістичних термів.

Для кожного параметра будується функція належності $\mu(x)$. Ця крива відображає значення з універсуму міркувань (наприклад, концентрації міліграмів на літр) у дійсне число на інтервалі $[0,1]$. Зокрема, для такого критичного показника, як "Розчинений кисень", функція належності моделюється за допомогою S-подібної кривої. Значення функції $\mu(x) \rightarrow 0$ відповідає найгіршому стану (5 клас), а $\mu(x) \rightarrow 1$ наближає нас до еталонної якості (1 клас). Цей математичний апарат дозволяє коректно описувати багатовимірні перехідні стани екосистеми.

6. Формування експертної бази знань та правил виведення.

Наступним кроком є робота системи нечіткого виведення (СНВ). Її інтелектуальним ядром є база знань, яка складається з набору логічних продукційних правил формату "ЯКЩО ... ТО ...". Ці правила фактично імітують алгоритм мислення досвідченого експерта-гідрохіміка.

У нашій моделі вхідні показники оцінюються через лінгвістичні терми від "Дуже добрий" до "Дуже поганий". База знань синтезує ці змінні. Наприклад:

- *ЯКЩО Розчинений кисень = Добрий ТА БСК5 = Задовільний ТА Азот амонійний = Добрий, ТО Якість води = Клас II.*
- *Або спрацьовує правило блокування токсикантів: ЯКЩО Свинець = Високий АБО Ртуть = Висока, ТО Якість води = Клас V.*

Отримана система дозволяє відносити водний об'єкт до одного з 5 класів (від "Відмінних" до "Дуже поганих") та деталізувати оцінку до рівня 7 категорій якості. Такий архітектурний підхід робить інформаційну модель надзвичайно гнучкою: ми можемо легко адаптувати її до динамічних змін, додаючи нові фактори забруднення у вигляді нових нечітких правил, не руйнуючи при цьому математичне ядро системи.

7. Висновки.

Впровадження інтелектуальних інформаційних систем є критично важливим кроком для переходу до сучасних стандартів управління екологічною безпекою та ефективного використання природних ресурсів. Такі системи стають невід'ємною частиною цифрової епохи, дозволяючи перетворювати великі масиви розрізаних даних на дієві управлінські рішення, що особливо важливо в умовах постійного антропогенного тиску на довкілля. Моделювання оцінювання якості водних ресурсів на основі апарату нечіткої логіки демонструє значну перевагу над традиційними методами, оскільки воно здатне ефективно опрацьовувати експертно-лінгвістичну інформацію у формі продукційних правил. Це дозволяє

гнучко пов'язати логічні терми вхідних показників із підсумковими категоріями якості, створюючи модель, яка адекватно відображає реальні перехідні стани водних екосистем.

Отримані в результаті дослідження аналітичні моделі функцій належності стають фундаментом для точного прогнозування змін у стані об'єктів, дозволяючи нівелювати похибки та невизначеності, притаманні вихідним даним. Запропонована методика виступає комплексним інструментом, що забезпечує отримання об'єктивних результатів з урахуванням як кількісних вимірів, так і складних якісних факторів, які важко піддаються класичній формалізації. Такий підхід робить інформаційну модель адаптивною до динамічних змін у навколишньому середовищі. Сформований науковий доробок не лише вирішує поточні завдання класифікації водних ресурсів, а й створює необхідне підґрунтя для масштабування моделі на інші сфери екологічного моніторингу. Подальша інтеграція цих розробок у сучасні цифрові платформи та системи реального часу відкриває нові перспективи для створення глобальних мереж автоматизованого контролю та збереження екосистем.

Література

1. Маляр, М. М., Половко, І. І., & Шаркаді, М. М. (2026). Застосування нечіткої логіки в інформаційно-аналітичних системах екологічного моніторингу. Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 48(1), 186–195.
2. Романенко В. Д., Жукинський В. М., Оксіюк О. П. та ін. Методика екологічної оцінки якості поверхневих вод за відповідними категоріями. — К.: Символ-Т, 1998. — 28 с.
3. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.

МОДЕЛЮВАННЯ НЕЧІТКИХ КЛАСТЕРІВ НА ОСНОВІ ЛІНГВІСТИЧНОЇ ЗМІННОЇ

Ірина Рясна, Олександр Сенько

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

MODELING OF FUZZY CLUSTERS BASED ON LINGUISTIC VARIABLE

Iryna Riasna, Oleksandr Senko

V.M. Glushkov institute of cybernetics of the NAS of Ukraine

Abstract. The paper considers the problem of fuzzy clustering of a set of fuzzy objects in the case when the number of clusters is not specified. The core of a fuzzy cluster is considered to be a set of objects with significant values of membership functions, which is presented as a set of the most "typical"

representatives of this cluster. This allows us to separate the "core" of the cluster from its "boundaries" – elements with insignificant values of the degree of membership in this cluster. To determine the "core" and "boundaries", a fuzzy similarity relation is used.

Розглянемо задачу нечіткої кластеризації множини нечітких об'єктів, у випадку коли кількість кластерів не задано.

Визначимо кластер як нечітку підмножину спеціального виду. Функцію належності такій нечіткій підмножині визначимо за ступенем схожості об'єктів кластера. Вважаємо, що достатньо сильні зв'язки всередині кластера визначають його ядро; сильні зв'язки визначають належність об'єктів кластеру; якщо зв'язки між об'єктами слабкі або їх немає зовсім, об'єкти знаходяться поза межами кластера.

Нехай задано скінченну множину елементів X , на якій визначено рефлексивне та симетричне відношення схожості \tilde{R} з функцією належності $f_{\tilde{R}}(x, y)$, доповнення якого $d_{\tilde{R}}(x, y) = 1 - f_{\tilde{R}}(x, y)$ є обмеженою псевдометрикою на $X \times X$ [1]. Вважаємо, що елемент $x \in X$ породжує нечіткий \tilde{R}_x -кластер, функція належності якого $\mu_{\tilde{R}_x}(y) = f_{\tilde{R}}(x, y)$ визначає ступінь схожості елемента $y \in X$ ядру нечіткого \tilde{R}_x -кластера.

Введемо поняття \tilde{S}_x -кластера, який є об'єднанням \tilde{R}_x -кластера та таких нечітких \tilde{R}_y -кластерів, $x, y \in X$, елементи ядер яких є "значно" схожими з ядром кластера \tilde{R}_x . Ядро \tilde{S}_x -кластера є об'єднанням ядер таких нечітких кластерів.

Нечітке поняття схожості елементів ядер нечітких кластерів \tilde{R}_x та \tilde{R}_y визначаємо за допомогою вербальних оцінок значень схожості. Елементи, які належать ядру \tilde{S}_x -кластера, мають значну схожість та вважаються типовими представниками цього кластера. Для формалізації цих особливостей введемо лінгвістичну змінну "схожість", яка визначається терм-множиною значень, що подані вербально, а саме, "дуже мала, середня, значна".

Семантичний зміст значення терму "значна" визначаємо як нечітку підмножину з функцією належності $\mu_3(\gamma)$ [2]:

$$\mu_z(\gamma) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \gamma \leq 1-2\alpha, \\ 2\left(\frac{\gamma+2\alpha-1}{2\alpha}\right)^2, & 1-2\alpha < \gamma \leq 1-\alpha, \\ 1-2\left(\frac{\gamma-1}{2\alpha}\right)^2, & 1-\alpha < \gamma \leq 1, \end{cases}$$

де $\gamma = \mu_{\tilde{R}_x}(y)$, $\gamma \in [0,1]$. Для $\gamma = 1-\alpha$ функція належності $\mu_z(\gamma) = 0,5$. Носієм нечіткої підмножини "значна" є інтервал $(1-2\alpha, 1]$. Цю нечітку підмножину використовуємо далі для визначення ядра \tilde{S}_x -кластера.

Терм "дуже мала" визначаємо так:

$$\mu_{\text{д.м}}(\gamma) = \begin{cases} 0, & 2\beta \leq \gamma \leq 1, \\ 2\left(\frac{\gamma-2\beta}{2\beta}\right)^2, & \beta \leq \gamma < 2\beta, \\ 1-2\left(\frac{\gamma}{2\beta}\right)^2, & 0 \leq \gamma < \beta. \end{cases}$$

Носієм нечіткої підмножини "дуже мала" є інтервал $[0, 2\beta)$, $\beta < 0,5-\alpha$, якщо $\gamma = \beta$ функція належності $\mu_{\text{д.м}}(\gamma) = 0,5$.

Для терму "середня" покладемо $\mu_{\text{ср}}(\gamma) = \min(1-\mu_z(\gamma), 1-\mu_{\text{д.м}}(\gamma))$.

Отже, лінгвістична змінна "схожість" ядер кластерів, яка задається терм-множиною "дуже мала, середня, значна", визначає, відповідно, нечітку підмножину елементів, що не входять в \tilde{S}_x -кластер, нечітку підмножину елементів, що визначають межі \tilde{S}_x -кластера, та нечітку підмножину, що визначає ядро \tilde{S}_x -кластера. Дефазифікація цих множин на рівні $\gamma = 0,5$ дає можливість виділити взаємно непересічні чіткі підмножини: ядро, межі і множину елементів, які не належать \tilde{S}_x -кластеру.

Введемо поняття ядра рівня α нечіткого \tilde{R}_x -кластера і, відповідно, нечіткого \tilde{S}_x -кластера рівня α .

Ядром рівня α нечіткого \tilde{R}_x -кластера, що породжується елементом $x \in X$, $0 \leq \alpha < 0,5$, назвемо чітку множину $\text{Ker}_\alpha \tilde{R}_x$,

$$\text{Ker}_\alpha \tilde{R}_x = \left\{ y \in \text{Supp } \tilde{R}_x \mid \mu_{\tilde{R}_x}(y) \geq 1-\alpha \right\}.$$

Неважко показати, що елементи ядра рівня α схожі між собою.

Межами нечіткого кластера \tilde{R}_x , для якого визначено ядро рівня α , назвемо чітку множину $Bound \tilde{R}_x = \left\{ y \in Supp \tilde{R}_x \mid \beta < \mu_{\tilde{R}_x}(y) < 1 - \alpha \right\}$.

Нехай нечіткий \tilde{S}_x -кластер, породжується елементами ядра рівня α кластера \tilde{R}_x , $Ker_\alpha \tilde{R}_x = \{z_1, \dots, z_{k(x)}\}$, де $k(x) = |Ker_\alpha \tilde{R}_x|$, $\tilde{S}_x = \bigcup_{z_i \in Ker_\alpha \tilde{R}_x} \tilde{R}_{z_i}$,

$Ker \tilde{S}_x = \bigcup_{z_i \in Ker_\alpha \tilde{R}_x} Ker \tilde{R}_{z_i}$. Такий кластер назвемо \tilde{S}_x -кластером рівня α

(або просто \tilde{S}_x -кластером). Функцію належності \tilde{S}_x -кластера рівня α , який породжується елементом $x \in X$, обчислюємо так:

$$\mu_{\tilde{S}_x}(y) = \begin{cases} 1, & y \in \bigcup_{i=1}^{k(x)} Ker_\alpha \tilde{R}_{z_i} \\ \max_y \left\{ \mu_{\tilde{R}_{z_i}}(y) \mid y \in \bigcup_{i=1}^{k(x)} Bound \tilde{R}_{z_i} \right\}, & \beta < \mu_{\tilde{R}_{z_i}}(y) < 1 - \alpha, i = \{1, \dots, k(x)\}, \\ 0, & y \notin \bigcup_{i=1}^{k(x)} Ker_\alpha \tilde{R}_{z_i} \ \& \ y \notin \bigcup_{i=1}^{k(x)} Bound \tilde{R}_{z_i}, \end{cases}$$

де \tilde{R}_{z_i} – нечіткий кластер, породжений елементом $z_i \in Ker_\alpha \tilde{R}_x$; $k(x)$ – кількість нечітких кластерів, які породжують \tilde{S}_x .

Отже, нехай задано множину N елементів $X = \{x_1, \dots, x_N\}$; множину $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ – сукупність n характеристик елементів множини X , які є лінгвістичними змінними; нехай $T^i = \{t_1^i, \dots, t_{m_i}^i\}$ – сукупність значень (терм-множина) лінгвістичної змінної w_i ; m_i – кількість значень лінгвістичної змінної $w_i \in W$; $\tilde{V}_i^i = \left\{ \left(u^i, \mu_{\tilde{V}_i^i}(u^i) \right) \right\}$ – нечітка підмножина, яка визначає семантичні значення відповідного терму t_l^i , $l \in \{1, \dots, m_i\}$, $i = \{1, \dots, n\}$; $u^i \in U^i$ – базова змінна лінгвістичної змінної w_i ; U^i – область визначення базової змінної u^i ; вважаємо, що кожний елемент $x_j \in X$ має хоча б одну характеристику $w_i \in W$; $\tilde{R} = \left\{ \left((x_i, x_j), f_{\tilde{R}}(x_i, x_j) \right) \mid (x_i, x_j) \in X \times X \right\}$ – нечітке відношення схожості, визначене на $X \times X$; $\{\tilde{R}_{x_1}, \dots, \tilde{R}_{x_N}\}$ – множина N нечітких кластерів, таких,

що $\forall x_i \in X \mu_{\tilde{R}_{x_i}}(x_j) = f_{\tilde{R}}(x_i, x_j)$, $\mu_{\tilde{R}_{x_i}}(x_j)$ – значення функції належності елемента $x_j \in X$ нечіткому кластеру \tilde{R}_{x_i} .

Нечіткі підмножини, які є результатами вимірювання характеристик $w_i \in W$ елементів $x_p, x_q \in X$, позначимо, відповідно, як

$$\tilde{A}_i = \left\{ (a_l^i, a_l^i) \right\}_{l=1}^{m_i}, \quad \tilde{B}_i = \left\{ (b_l^i, b_l^i) \right\}_{l=1}^{m_i}, \quad a_l^i = \mu_{\tilde{v}_i}(u^i(x_p)), \quad b_l^i = \mu_{\tilde{v}_i}(u^i(x_q)).$$

Функцію належності відношення схожості елементів $x_p, x_q \in X$ обчислюємо за формулою

$$f_{\tilde{R}}(x_p, x_q) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_i|}{|\tilde{A}_i \cup \tilde{B}_i|} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^{m_i} \min(a_l^i, b_l^i) \right) / \left(\sum_{l=1}^{m_i} \max(a_l^i, b_l^i) \right).$$

Позначимо Θ – множину нечітких \tilde{S}_{x_i} -кластерів, $\Theta = \{ \tilde{S}_{x_1}, \dots, \tilde{S}_{x_N} \}$, для заданих α, β , $0 \leq \alpha < 0,5$, $\beta < 0,5 - \alpha$. Нехай Ω_Θ – множина усіх можливих комбінацій елементів множини Θ .

Задачу нечіткої кластеризації сформулюємо так: для заданих α, β знайти елемент $\xi^* \in D \subseteq \Omega_\Theta$, $|\xi^*| \geq 2$, такий, що $F(\xi^*) = \max_{\xi \in D \subseteq \Omega_\Theta} F(\xi)$, де D

– допустима область, визначена так: $\forall x_p, x_q \in X$, таких, що $x_p \neq x_q$
 $Ker \tilde{S}_{x_p} \cap Ker \tilde{S}_{x_q} = \emptyset$.

Розв'язками задачі є нечіткі комбінаторні об'єкти другого порядку першого типу [3]. Як критерій оптимізації F вибираємо потужність об'єднання ядер \tilde{S}_{x_i} -кластерів: $F = \sum_{\tilde{S}_{x_i} \in \xi} |Ker \tilde{S}_{x_i}|$.

Як результат розв'язання оптимізаційної задачі отримаємо множину \tilde{S}_{x_i} -кластерів, ядра яких визначені на основі лінгвістичної змінної "схожість".

Висновки. Запропоновано спосіб визначення ядер нечітких кластерів як метод зменшення невизначеності у вихідній множині даних, що в свою чергу обґрунтовує вибір "типових" (еталонних) елементів в задачах кластеризації та класифікації. Таким чином визначені "ядра" дозволяють працювати лише з частиною нечіткої множини, що є важливим етапом в задачах прийняття рішень в експертних системах.

Література

1. Riasna, I.I. (2023) Nечetkiy klasternyy analiz: psevdometriki i nechetkiye klastery. Kibernetika i komp'yuternyye tekhnologii, (1), 23 – 34, [In Ukrainian].

2. Zadeh, L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*, (8), 199 – 249.

3. Hulianytskyi, L.F., Riasna, I.I. (2016). Do formalizachii zadach kombinatornoi optimizachii na nechitkih mnozhinah. *Teoria optimal'nih risen*, (15), 17 – 25, [In Ukrainian].

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА НЕЧІТКИХ КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ ПЕРЕСТАНОВОК ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Семенова¹ Н. В., Колечкіна² Л. М., Колесніков¹ Д.С.

¹*Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України;*

²*Київський Національний Економічний Університет ім. Вадима
Гетьмана*

MATHEMATICAL MODEL OF VECTOR OPTIMIZATION ON FUZZY COMBINATORIAL CONFIGURATIONS OF PERMUTATIONS AND ITS APPLICATIONS

Semenova N.V.¹, Kolechkina L.M.², Kolesnikov D.S.¹

¹*V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, NAS of Ukraine;*

²*Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman*

Abstract. The work proposes a mathematical model of discrete processes and systems in the form of a vector optimization problem on a fuzzy combinatorial configuration of permutations. The model takes into account fuzziness both in the objective functions and in the admissible set. The Edgeworth–Pareto principle is extended to the class of problems with a fuzzy admissible set and fuzzy criteria. A decomposition approach to solving the problem based on the method of successive concessions under fuzzy conditions is developed, which reduces the fuzzy vector problem to solving a sequence of clear problems on the permutation polyhedron, while retaining the possibility of generating different Pareto-optimal solutions by varying the fuzzy parameters. Typical classes of applied problems are described: optimal assignment, routing, resource allocation, which naturally fit into the proposed model.

Прийняття рішень в умовах невизначеності є однією з ключових проблем прикладної математики та системного аналізу. У реальних задачах управління, планування й проектування параметри моделі нерідко не можуть бути задані точно — вони визначаються на основі лінгвістичних оцінок, суб'єктивних суджень або неповних статистичних даних. Одним із найбільш природних математичних інструментів для формалізації такої ситуації є теорія нечітких множин [1, 2]. Разом із цим, широкий клас практичних оптимізаційних задач, зокрема задачі складання розкладів,

маршрутизації, розподілу ресурсів, зводиться до вибору оптимального рішення з комбінаторної конфігурації. Особливе місце серед комбінаторних конфігурацій посідають множини перестановок, геометрична структура яких визначається багатогранником перестановок в евклідовому просторі [3, 5]. Поєднання нечіткості вхідних даних з комбінаторною структурою допустимої множини утворює клас задач, що потребує спеціальних підходів до моделювання та розв'язання.

У даній роботі формулюється математична модель дискретних процесів і систем різного призначення у вигляді векторної задачі оптимізації на нечіткій комбінаторній конфігурації перестановок та описуються підходи до її розв'язання.

1. Базові поняття та структура допустимої множини

Нехай задана нечітка мультимножина \tilde{X} на універсальній мультимножині X .

Означення 1. [5-7]. Нечіткою мультимножиною \tilde{X} , заданою на універсальній мультимножині X називається сукупність пар $(x, \mu_{\tilde{X}}(x))$, де $x \in X$, $\mu_{\tilde{X}}(x)$ – функція, $\mu_{\tilde{X}}(x): X \rightarrow [0,1]$, що має назву функції належності (membership function) мультимножині \tilde{X} . Значення $\mu_{\tilde{X}}(x)$ для конкретного x називається ступенем належності цього елемента нечіткій мультимножині \tilde{X} .

Вище сформульоване означення узагальнює класичне поняття мультимножини і дозволяє враховувати невизначеність у заданні вхідних даних.

Як відомо, мультимножини відповідно до означення утворюють підклас класу нечітких мультимножин. Над нечіткими множинами, так само як і над класичними множинами виконується ряд операцій, таких як об'єднання, перетин, декартовий добуток, різниця та ін. Ці операції мають місце і для нечітких мультимножин [6,7].

Нехай задана нечітка мультимножина

$$\tilde{A} = \left\{ (a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1)), (a_2, \mu_{\tilde{A}}(a_2)), \dots, (a_q, \mu_{\tilde{A}}(a_q)) \right\}, \text{ її основа}$$

$$S(\tilde{A}) = \left\{ (e_1, \mu_{\tilde{A}}(e_1)), (e_2, \mu_{\tilde{A}}(e_2)), \dots, (e_k, \mu_{\tilde{A}}(e_k)) \right\}, \text{ де}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(e_i) = \min \left\{ \mu_{\tilde{A}}(a_{i_j}) \mid a_{i_j} = a_i, j \neq t, \forall i, j, t \in N_q \right\},$$

$$e_j \in R_1 \quad \forall j \in N_k = \{1, \dots, k\} \text{ і кратність елементів } k(e_j) = r_j, j \in N_k,$$

$$r_1 + r_2 + \dots + r_k = q.$$

Упорядкованою нечіткою n -вибіркою з нечіткою мультимножини \tilde{A} називається набір

$$a = \left((a_{i_1}, \mu_{\tilde{A}}(a_{i_1})), (a_{i_2}, \mu_{\tilde{A}}(a_{i_2})), \dots, a_{i_n}, \mu_{\tilde{A}}(a_{i_n}) \right), \quad (1)$$

де $a_{i_j} \in \tilde{A} \quad \forall j \in N_k, \quad \forall j \in N_k, \quad i_s \neq i_t$, якщо $s \neq t \quad \forall s \in N_k, \quad \forall t \in N_k$.

Означення 2. [6,7]. Нечітка підмножина $P(\tilde{A})$, елементами якої є нечіткі n -вибірки вигляду (1) з нечіткої мультимножини \tilde{A} , називається нечіткою евклідовою комбінаторною множиною, якщо для довільної пари її елементів $a = (a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1)), (a_2, \mu_{\tilde{A}}(a_2)), \dots, (a_n, \mu_{\tilde{A}}(a_n))$ і $b = (b_1, \mu_{\tilde{A}}(b_1)), (b_2, \mu_{\tilde{A}}(b_2)), \dots, (b_n, \mu_{\tilde{A}}(b_n))$ виконуються умови:

$$(a \neq b) \Leftrightarrow (\exists j \in N_n : (a_j, \mu_{\tilde{A}}(a_j)) \neq (b_j, \mu_{\tilde{A}}(b_j))), \text{ тобто множина } P(\tilde{A})$$

має таку властивість: два елементи множини $P(\tilde{A})$ відмінні один від одного, якщо вони незалежно від інших відмінностей відрізняються порядком розміщення символів, що їх утворюють і ступенем належності нечіткій підмножині $P(\tilde{A})$.

Нечітка множина перестановок з повтореннями з n дійсних чисел, серед яких k різних, називається загальною нечіткою множиною перестановок і позначається $P_{nk}(\tilde{A})$.

2. Математична модель векторної задачі оптимізації

Розглядається векторна задача комбінаторної оптимізації

$$Z(F, X) : \max \left\{ F(x) \mid x \in X \subset R^n \right\},$$

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_l(x)), \quad f_i : R^n \rightarrow R, \quad i \in N_\ell,$$

$$X = \text{vert } \Pi_{nk}(A) \cap D \neq \emptyset, \quad \Pi_{nk}(A) = \text{conv } P_{nk}(A),$$

де $P_{nk}(A)$ – комбінаторна множина перестановок, $D \subset R^n$ – опуклий багатогранник. На множині X задана нечітка підмножина $\tilde{X} = \{x, \mu_{\tilde{X}}(x)\}$, де $x \in X$, а $\mu_{\tilde{X}}(x) : X \rightarrow [0,1]$ – функція належності множині \tilde{X} . Під максимізацією в задачі $Z(F, X)$ будемо розуміти вибір нечіткої підмножини \tilde{R} з нечіткої множини \tilde{X} , якій відповідає найбільше значення, як векторної функції F , так і функції належності $\mu_{\tilde{X}}(x)$ нечіткій множині альтернатив. Ці альтернативи в задачах багатокритерійної оптимізації називаються оптимальними за Парето. Отже, векторна задача оптимізації полягає у знаходженні елементів множини Парето $P(X)$ — таких розв'язків, для яких не існує іншого розв'язку, що був би кращим за

всіма критеріями одночасно (і хоча б за одним — строго кращим).

Один із найважливіших підходів до знаходження Парето оптимальних розв'язків у багатокритерійних задачах (будь-якої природи — як неперервних, так і дискретних) ґрунтується на лінійній згортці критеріїв. Його суть полягає у скаляризації задачі, тобто у зортанні векторного критерію в одну числову функцію, а перевага — у можливості застосування ефективного апарату теорії оптимізації, що має назву алгоритми лінійної зортки критеріїв (АЛЗК). На жаль, АЛЗК не завжди гарантують знаходження всіх Парето оптимальних розв'язків у векторних задачах дискретної оптимізації. Це означає, що існують так індивідуальні задачі, в яких певний Парето оптимальний розв'язок не вдається знайти жодною лінійною зорткою критеріїв. У такому разі кажуть, що масова задача є нерозв'язною за допомогою АЛЗК. Але для задач на комбінаторних конфігураціях перестановок такі алгоритми ефективно застосовуються, оскільки елементи множини перестановок є вершинами множини переставного багатогранника.

Наведена модель охоплює широкий клас практичних задач на комбінаторних конфігураціях перестановок, зокрема оптимізацію розкладів, задачі про призначення з нечіткими перевагами, транспортні задачі з нечіткими витратами, задачі розподілу ресурсів в умовах неповної інформації. Ключовою особливістю моделі є те, що нечіткість може бути присутня як у описі векторного критерію, так і у визначенні ісамої допустимої множини — або одночасно в обох компонентах.

3. Підхід до розв'язання

Відповідно до концепції Белмана–Заде [1], нечіткий розв'язок задач визначається як перетин нечіткої мети і нечітких обмежень. Для розв'язання сформульованої нечіткої векторної задачі розроблено підхід, що ґрунтується на методі послідовних поступок, модифікованого для умов нечіткості.

Декомпозиційний підхід. Для кожної нечіткої цільової функції $f_k^* = \max_{x \in X} f_k(x) : R^n \rightarrow R, k \in N_l$, вводяться поріг та межа допуску, і визначається функція належності нечіткої мети.

В силу встановленої нерівності між порогом g_i і межею допуску t_i , $\mu_{\tilde{X}}(f_i(x))$ є покомпонентно зростаючою функцією. Чим більший ступінь належності альтернативи x до нечіткої множини мети, тобто чим більше значення функції $\mu_{\tilde{X}}(f_i(x))$, тим вищим буде ступінь досягнення цієї мети, якщо вибрати за розв'язок альтернативу x .

Шляхом варіювання порогів та меж допуску можна генерувати різні Парето-оптимальні точки.

Критерії впорядковуються за спаданням важливості: f_1, f_2, \dots, f_ℓ . Процедура включає ℓ кроків: на k -му кроці максимізується критерій $f_k(x)$ за умови, що значення критеріїв $f_1(x), \dots, f_{k-1}(x)$ не опускаються

нижче встановлених на попередніх кроках рівнів мінус допустима поступка $\tilde{\Delta}_i \geq 0$.

Слід зазначити, що величина допустимої поступки є нечітко заданою.

Оптимальним вважається той розв'язок, що є розв'язком останньої задачі з наступної послідовності задач:

$$\begin{aligned} f_1^* &= \max \{f_1(x) | x \in X\}, \\ f_2^* &= \max \{f_2(x) | x \in X, f_1(x) \geq f_1^* - \tilde{\Delta}_1\}, \dots, \\ f_\ell^* &= \max \{f_\ell(x) | x \in X, f_{r-1}(x) \geq f_{r-1}^* - \tilde{\Delta}_{r-1}, r \in N_\ell \setminus \{1\}\}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що у випадку, коли всі $\tilde{\Delta}_r = 0$ метод знаходить тільки лексикографічно оптимальні розв'язки, які забезпечують найбільше значення першому за важливістю критерію $f_1(x)$. Зміна величин поступок $\tilde{\Delta}_r$ дозволяє регулювати ступінь ієрархічності пріоритетів. В умовах нечіткості допустимої множини обмеження задачі доповнюються умовою $\mu_{\tilde{X}}(f_i(x)) \geq \alpha$, яка задає α -рівневий зріз нечіткої множини і зводить нечітку задачу до чіткої.

4. Застосування моделі до задач дискретних систем

Запропонована математична модель природно описує дискретні процеси і системи різного призначення, де рішення приймається в умовах нечітко заданих даних. Розглянемо типові приклади застосувань.

Задача оптимального призначення з нечіткими перевагами (Fuzzy Assignment Problem - FAP) – це розширення класичної задачі про призначення, в якій витрати, час або переваги, пов'язані з призначенням виконавців на роботи, не є точними числами, а задаються нечіткими величинами (наприклад, нечіткими числами), відображаючи невизначеність або суб'єктивність оцінок.

У задачі побудови оптимального маршруту обходу n об'єктів допустима множина маршрутів є множиною перестановок P_n . Нечіткість виникає при оцінці витрат на переміщення (залежність від трафіку, погодних умов) та обмежень на допустимі маршрути (наприклад, нечіткі часові вікна обслуговування).

Задача розподілу ресурсів в організаційних системах. При плануванні виробничих процесів або розподілі навантаження між підрозділами порядок виконання операцій утворює перестановку, а критерії якості (продуктивність, витрати, терміни) часто мають нечіткий характер через залежність від зовнішніх факторів. В усіх наведених прикладах запропонована модель забезпечує лінійну структуру задачі після зведення до чіткого еквівалента, що дозволяє з урахуванням властивостей переставного багатогранника як допустимої множини застосовувати методи лінійної оптимізації.

Висновки

У роботі запропоновано математичну модель дискретних процесів і систем у вигляді векторної задачі оптимізації на нечіткій комбінаторній конфігурації перестановок. Модель враховує нечіткість як у цільових функціях, так і в допустимій множині. Принцип Еджворта–Парето поширено на клас задач із нечіткою допустимою множиною та нечітко заданими критеріями.

Розроблено декомпозиційний підхід на основі методу послідовних поступок в умовах нечіткості, що зводить нечітку векторну задачу до розв'язання послідовності чітких задач на багатограннику перестановок, зберігаючи можливість генерування різних Парето-оптимальних розв'язків шляхом варіювання параметрів нечіткості.

Описано типові класи прикладних задач: оптимального призначення, маршрутизації, розподілу ресурсів, що природно вписуються у запропоновану модель. Подальші дослідження планується спрямувати на розробку алгоритмів ефективного перебору вершин переставного багатогранника в умовах нечіткості та на побудову рандомізованих версій запропонованих методів.

Література

1. Bellman R.E., Zadeh L.A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*. Vol. 17, N 4. P. 141–164.
2. Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965. Vol. 8. P. 338–353.
3. Bowman V.J. Permutation polyhedra. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1972. Vol. 22, N 4. P. 580–589.
4. Желдак, Т.А., Коряшкіна, Л.С., Ус С.А. (2020). Нечіткі множини в системах управління та прийняття рішень. Міністерство освіти і науки України, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка». Fuzzy sets in management and decision-making systems. Ministry of Education and Science of Ukraine, National Technical University "Dnipro Polytechnic". Дніпро: НТУ "ДП". 387р.<http://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/156356>.
5. Семенова Н.В., Колечкіна Л.М. (2009). Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. [Vector discrete optimization problems on combinatorial sets: methods of research and solution]. Київ: Наукова думка, 266 с.
6. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagirna A.M. (2011). Vector optimization problems with linear criteria over a fuzzy combinatorial set of alternatives. *Cybernetics and Systems Analysis*. Vol. 47, N 2. P. 250–259.
7. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. (2011). Розв'язання задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. [Solving combinatorial optimization problems on fuzzy sets]. Полтава: ПУЕТ. 239 с.
8. Zimmermann H.-J. (2013). Fuzzy Set Theory and Its Applications. Third Edition. Kluwer Academic Publishers, Boston. 441p.

ПІДВИЩЕННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ЕФЕКТИВНОСТІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ОБЛИЧ ШЛЯХОМ GPU-ПРИСКОРЕННЯ БІБЛІОТЕКИ DLIB

Олексій Смірнов, Віктор Заріцький, Костянтин Буравченко,
Сергій Смірнов

*Центральноукраїнський національний технічний університет, м.
Кропивницький, Україна*

INCREASING THE COMPUTING EFFICIENCY OF FACE IDENTIFICATION THROUGH GPU-ACCELERATION OF THE DLIB LIBRARY

Oleksii Smirnov, Viktor Zaritskyi, Kostiantyn Buravchenko,
Serhii Smirnov

Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

Abstract. The paper presents a comprehensive analysis of the effectiveness of modern computer vision methods in face detection tasks in static images and in video streams. A comparative study of dlib library algorithms was conducted: the classical approach based on histograms of oriented gradients (HOG) and the neural network method based on convolutional networks (CNN). Particular attention was paid to optimizing the high computational complexity of CNN models by implementing NVIDIA CUDA parallel computing technology. For an objective assessment of performance, a benchmarking software toolkit was developed that allows for automated measurement of frame rate (FPS), inference time, and stability of algorithms on different hardware. It was experimentally confirmed that the use of graphics accelerators (GPU) provides a multiple increase in data processing speed while maintaining high detection accuracy, which is critical for real-time systems. The results of the study serve as a methodological basis for selecting optimal configurations when designing high-load video analytics, biometric identification, and intelligent video surveillance systems.

Постановка проблеми. На сьогодні теорія розпізнавання образів переживає етап стрімкого розвитку, що зумовлено інтеграцією технологій штучного інтелекту та суттєвим розширенням сфер їхньої експлуатації. Сучасні методи візуального аналізу демонструють високу ефективність у різноманітних прикладних задачах: Військова сфера: інтелектуальні системи ідентифікації для безпілотних літальних апаратів, що набуло особливого значення в умовах російсько-української війни; Промисловість та логістика: системи технічного зору для дефектоскопії на виробничих лініях, автоматизація обліку товарів у торгівлі через зчитування QR- та штрих-кодів; Медицина та безпека: високоточна діагностика захворювань за медичними зображеннями, а також побудова комплексних систем безпеки (відеоспостереження, ідентифікація номерних знаків тощо). Дане дослідження зосереджене на застосуванні розпізнавання образів у

комплексних системах безпеки. У цьому контексті технології автоматичної ідентифікації облич стають фундаментальним компонентом сучасних "розумних міст", банківського сектора та транспортної інфраструктури. Пріоритетною вимогою до таких рішень є забезпечення обробки відеоданих у режимі реального часу з мінімальними затримками. Саме тому в умовах зростання вимог до точності спостерігається стійка тенденція переходу від класичних алгоритмів до методів глибокого навчання (Deep Learning), що дозволяють ефективно вирішувати складні задачі ідентифікації в динамічному середовищі». Сучасні архітектури нейронних мереж демонструють високу інваріантність до складних умов освітлення, оклюзій (часткових перекриттів) та ракурсних поворотів обличчя, що було критичним обмеженням для алгоритмів попередніх поколінь. Водночас широке впровадження методів згорткових нейронних мереж (CNN) зумовлює проблему значного зростання обчислювальної складності. Використання традиційних центральних процесорів (CPU) для виконання операцій згортки створює дефіцит продуктивності ("пляшкове горлечко"), що унеможливило підтримання необхідної частоти кадрів (FPS) у системах реального часу. Ефективним шляхом подолання цього бар'єра є використання графічних прискорювачів (GPU) та технології NVIDIA CUDA, які дозволяють паралелізувати масивні обчислювальні операції. Це забезпечує необхідний компроміс між максимальною точністю розпізнавання та швидкістю відгуку системи. Особливий інтерес становлять гібридні рішення на базі бібліотеки dlib, що підтримують роботу з високоефективним детектором MMOD CNN. Наукова та практична задача дослідження полягає в експериментальній перевірці та кількісному оцінюванні приросту продуктивності при переході від класичного методу HOG (на базі CPU) до нейромережевого методу CNN (із застосуванням GPU-прискорення). Це передбачає розробку уніфікованої методики тестування для визначення реального виграшу в швидкодії (speedup) та валідації можливості використання передових алгоритмів у високонавантажених системах відеоаналітики

Алгоритми інтелектуального аналізу даних та їх інтеграція з ШІ

Бібліотека dlib реалізує два концептуально різних підходи до детекції об'єктів. Перший – метод HOG (Histogram of Oriented контурних ознак і форми об'єкта. Завдяки низькій обчислювальній складності цей алгоритм традиційно виконується на CPU. Він демонструє високу ефективність при розпізнаванні фронтальних образів, проте залишається вразливим до значних ракурсних поворотів. Другий підхід базується на використанні згорткових нейронних мереж (CNN), зокрема архітектури MMOD. Ця глибока мережа здатна ідентифікувати складні ієрархічні ознаки, що забезпечує високу стійкість (robustness) детекції в складних умовах. Проте через необхідність виконання масивних матричних обчислень (мільйони операцій на один кадр) цей метод вимагає застосування GPU, де паралельна архітектура дозволяє максимально

ефективно реалізувати потенціал нейромережових моделей.

Технологія CUDA для прискорення обчислень

Архітектура NVIDIA CUDA (Compute Unified Device Architecture) перетворює графічний процесор на потужний інструмент для масивних паралельних обчислень. На відміну від центрального процесора (CPU), орієнтованого на послідовне виконання складних команд обмеженою кількістю ядер, GPU містить тисячі спеціалізованих ядер, здатних одночасно обробляти масиви пікселів або нейронні зв'язки. Інтеграція бібліотеки dlib із технологією CUDA дозволяє делегувати найбільш ресурсомісткі тензорні операції (tensor operations) відеокарті. Це суттєво знижує навантаження на CPU та забезпечує роботу складних моделей глибокого навчання в режимі реального часу. Для проведення порівняльного аналізу було розроблено авторське програмне забезпечення мовою Python, призначене для бенчмаркінгу обох методів детекції на уніфікованому наборі даних. Експериментальна частина реалізована з використанням бібліотек dlib, NumPy (для обробки масивів) та Matplotlib (для статистичної візуалізації результатів).

Методика експерименту та програмна реалізація

Для забезпечення об'єктивності вимірювань було розроблено програмний модуль FaceDetectionBenchmark. Методика тестування включає попередню депортацію кадрів у оперативну пам'ять, процедуру «прогріву» графічного процесора (для стабілізації CUDA-контексту та виключення затримок ініціалізації), а також індивідуальну фіксацію часу детекції для кожного кадру. Особлива увага в реалізації приділена метрологічній точності: використання прецизійних таймерів та розрахунок середньоквадратичного відхилення дозволяють кількісно оцінити стабільність обробки відеопотоку та рівень джиттеру (jitter).

Результати роботи методу HOG (CPU)

Результати тестування класичного детектора на базі CPU продемонстрували стабільні показники продуктивності. Середній час обробки одного кадру коливався в межах 25-30 мс (відповідно до роздільної здатності), що забезпечує пропускну здатність на рівні 30-40 Головною перевагою даного підходу є мінімальні апаратні вимоги та відсутність потреби у спеціалізованому високовартісному обладнанні. Водночас аналіз точності виявив суттєвий недолік: алгоритм HOG часто не ідентифікує обличчя при нетипових ракурсах (під кутом) або в умовах складного (нестандартного) освітлення.

Результати роботи методу CNN (GPU/CUDA)

Експлуатація CNN-детектора без апаратного прискорення (на CPU) продемонструвала критично низьку продуктивність: час обробки одного кадру перевищив 800 мс (~1.2 FPS), що унеможливило роботу з відеопотоком у реальному часі. Активація технології CUDA кардинально змінила показники швидкодії: час інференсу скоротився до 15-20 мс, забезпечуючи частоту понад 50 FPS. Водночас суттєво зросла повнота детекції (recall): нейромережовий підхід успішно ідентифікував обличчя в

складних ракурсах, які були пропущені класичним методом HOG.

Порівняльна характеристика та візуалізація

Результати аналізу наочно демонструють переваги впровадження апаратного прискорення. Розрахований коефіцієнт інтенсифікації обчислень (speedup) досяг значення 2,28.

Висновки та перспективи подальших досліджень

У межах роботи проведено комплексне дослідження інструментарію бібліотеки dlib для ідентифікації облич та реалізовано практичний етап оптимізації обчислювальних процесів. Встановлено, що продуктивність традиційних методів на базі CPU є недостатньою для функціонування сучасних згорткових нейронних мереж у режимі реального часу. Експериментальна апробація розробленого програмного модуля підтвердила, що впровадження технології CUDA забезпечує кратне прискорення детекції порівняно з CPU-інференсом тієї ж моделі. Більш того, нейромережевий підхід із GPU-прискоренням за швидкістю перевершує навіть спрощені алгоритми (HOG), водночас демонструючи суттєво вищу точність розпізнавання. Перспективним напрямом подальших розвідок є впровадження механізмів пакетної обробки кадрів (batch-processing) для максимізації пропускної здатності системи, а також аналіз ефективності використання спеціалізованих тензорних ядер (Tensor Cores) у відеокартах новітніх архітектур.

ДВОКРИТЕРІАЛЬНА ЗАДАЧА ПАРАЛЕЛЬНОГО УПОРЯДКУВАННЯ ВЕРШИН ОРГРАФІВ

Валентина Турчина, Віталій Донець

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

TWO-CRITERIA PROBLEM OF PARALLEL ORDERING OF VERTICES OF DIGRAPHS

Valentyna Turchyna, Vitalii Donets

Oles Honchar Dnipro National University

Abstract. Methods for solving parallel ordering problems in classical formulations are the theoretical basis for conducting research on problems that arise from practical needs. This paper considers a new formulation in which, in addition to the classical objective function corresponding to the length of the ordering, an objective function describing the communication channels between neighboring places in the ordering is also considered. For the formulated two-criteria problem, an exact algorithm based on the directed search scheme is proposed.

Відомо багато прикладних задач, в яких необхідно при заданій кількості ресурсів, виділених на виконання певних завдань з технологічними обмеженнями на порядок їх виконання, використати ресурси так, аби завершити виконання цих завдань за мінімальний час. Такі задачі виникають у будівництві, при розпаралеленні обчислень, в автомобілебудуванні та в інших сферах.

Розглянемо задачі, у яких задано:

- скінченну множину завдань;
- технологічні обмеження на порядок виконання;
- множину ресурсів для виконання завдань.

На основі цього сформовано наступну задачу.

Задача 1. Побудувати розподіл завдань по взаємно замінних ресурсах так, щоб виконати всі завдання за мінімальний час без порушень обмежень на порядок виконання.

Технологічні обмеження зручно задавати у вигляді орієнтованого графу $G = (V, U)$.

Перед тим, як навести математичну постановку вказаної задачі, наведемо деякі відомі означення.

Означення 1. Паралельне упорядкування S елементів множини V – це таке розміщення елементів по місцях, розташованих у лінію, при якому номери місць послідовників більші за номери місць попередників.

Означення 2. Довжиною упорядкування S називають величину $l(S)$, що відповідає кількості непорожніх місць.

Вважається, що всі зайняті місця мають менший номер, ніж порожні.

Означення 3. Шириною упорядкування S називають величину $h(S)$, що визначається за наступною формулою:

$$h(S) = \max_{1 \leq k \leq l} |S[k]|, \quad (2)$$

де $S[k]$ – множина вершин, що стоять в S на місці k .

Наведемо математичну постановку задачі 1. У відповідність завданням, які занумеровані натуральними числами $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, поставимо множину вершин графа V . Розподіл завдань можна подати у вигляді паралельного упорядкування. Довжину упорядкування можна вважати загальним часом виконання завдань, а ширину – кількістю ресурсів.

Отримано наступну математичну постановку наведеної задачі.

Задача 1. Задано граф G та ширину упорядкування. Побудувати паралельне упорядкування мінімальної довжини [1].

Математична модель цієї задачі має наступний вигляд:

$$l(S) \rightarrow \min_s, \quad (3)$$

$$|S[k]| \leq h, k = \overline{1, l(S)}. \quad (4)$$

Розглянемо одне з узагальнень цієї задачі. Нехай також задано множину комунікацій, які використовуються для передачі результату виконання одного завдання для виконання наступного. Поставимо у відповідність цим комунікаціям дуги орграфу.

З урахуванням вище наведеного маємо наступну задачу.

Задача 2. Потрібно побудувати такий розподіл завдань по взаємно заміних ресурсах, щоб використовуючи наявні ресурси:

- виконати всі завдання за мінімальний час без порушень обмежень на порядок виконання;
- мінімізувати максимальну кількість використаних комунікацій між сусідніми моментами часу.

Кількість вихідних дуг з i -ї вершини позначимо як c_i , $i = \overline{1, n}$. Введемо вектор $C(S)$, k -й елемент якого – кількість вихідних дуг з усіх вершин, розміщених на k -му місці упорядкування S . Останній елемент цього вектору завжди буде дорівнювати нулю, оскільки на останнє місце упорядкування завжди будуть поставлені лише вершини, що не мають вихідних дуг.

Враховуючи це, математична постановка задачі 2 має наступний вигляд.

Задача 2. Задано граф G та ширину упорядкування. Побудувати таке паралельне упорядкування мінімальної довжини, щоб максимальна компонента вектору $C(S)$ була мінімальною.

Математична модель цієї задачі має наступний вигляд:

$$l(S) \rightarrow \min_S, \quad (5)$$

$$\max C(S) \rightarrow \min_S, \quad (6)$$

$$|S[k]| \leq h, k = \overline{1, l(S)}. \quad (7)$$

Наведені задачі є задачами дискретної оптимізації, що відносяться до класу NP-важких.

Для сформульованої задачі пропонується алгоритм, який складається з наступних етапів.

Етап 1. Аналіз спеціальних упорядкувань \underline{S} , \overline{S} та оцінка значень цільових функцій.

На цьому етапі потрібно реалізувати наступні пункти.

1.1. Побудова упорядкувань \underline{S} , \overline{S} та оцінка довжини [1].

На цьому етапі будуються упорядкування \underline{S} та \overline{S} , а також оцінюється значення довжини \tilde{l} упорядкування. Якщо воно не дорівнює довжині критичного шляху графу l , переходимо на 1.3.

1.2. Побудова упорядкування $S_c = \underline{S} \cap \bar{S}$.

Воно містить всі вершини, що знаходяться на критичних шляхах графу, і місця яких визначені однозначно.

За допомогою упорядкування S_c можна встановити, чи є одне з побудованих упорядкувань оптимальним. Для цього додатково вводяться вектори $\underline{C} = C(\underline{S})$ та $\bar{C} = C(\bar{S})$. Потім обчислюється величина $\Delta C = \min \{ \max \underline{C}, \max \bar{C} \}$. Якщо $\max C(S_c) = \Delta C$, то необхідно перевірити виконання обмежень (6) для упорядкувань \underline{S} та \bar{S} . Те упорядкування, для якого вони виконуються та значення цільової функції (5) дорівнює ΔC , буде оптимальним і роботу алгоритму завершено.

1.3. Оцінка значення цільової функції (5), яку позначимо \tilde{C} .

Очевидно, що оптимальне значення C^* цільової функції (5) буде задовольняти нерівність

$$C^* \geq \max_{1 \leq i \leq n} c_i. \quad (8)$$

У якості найпростішої оцінки значення C^* цільової функції (5) (без врахування структури графу) можна взяти наступну оцінку:

$$C^* \geq \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} c_i, \left[\frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^n c_i \right] \right\}. \quad (9)$$

Якщо $\tilde{l} = l$, то значення цільової функції (5) можна уточнити:

$$C^* \geq \max \{ \tilde{C}, \max C(S_c) \}, \quad (10)$$

Після оцінки необхідно знову перевірити упорядкування \underline{S} , \bar{S} . Якщо значення цільової функції (5) для одного з упорядкувань дорівнює значенню \tilde{C} та виконуються обмеження (6), то відповідне упорядкування буде оптимальним і роботу алгоритму завершено.

Етап 2. Побудова упорядкування.

У множину W заносимо вершини, які будуть аналізуватися на даному кроці (якщо $\tilde{l} = l$, то це будуть лише вершини, що не розташовані на критичних шляхах). Нехай j – змінна, що відповідає місцю в упорядкуванні S , яке буде заповнюватись; p – змінна, що вказує, з якого місця упорядкування \underline{S} необхідно обрати вершини для розташування.

2.1. Відбір вершин.

Додавання вершин у множину W з p -го місця упорядкування \underline{S} відбувається в одному з наступних випадків (за умови, що $p \leq \tilde{l}$):

- у множині W менше вершин, ніж можна розташувати на k -те місце;
- усі вершини у ній не мають вихідних дуг.

Перевірка обмежень на порядок слідування ілюструється відповідними мітками вершин.

Мітку «+» отримує вершина, для якої обмеження виконані.

Вершина, яку неможливо розташувати на дане місце, отримує мітку «-», а вершина, через яку порушується порядок, або вже отримала мітку «-», або помічається «++».

Якщо $\tilde{l} = \underline{l}$, то спочатку відбувається перевірка обмежень між вершинами множин W та $S_c [j]$. У разі наявності вершини з міткою «-» переходимо на етап 3.

Виконуємо перевірку обмежень на порядок слідування лише для вершин множини W та розставляємо їм мітки за вище описаним принципом, видаливши попередньо всі мітки вершин.

2.2. Відбір комбінацій.

3 вершин з мітками «+» та «++» складаються комбінації вершин, якими можна заповнити відповідне місце упорядкування. Для кожної комбінації T обчислюється величина

$$\sum_{r: v_r \in T} c_r. \quad (11)$$

Комбінації, для яких значення величини (10) перевищує \tilde{C} , не розглядаються. При неоднозначності вибору перевага надається тим комбінаціям, які містять вершини з меншими діапазонами і величина (10) найближча до \tilde{C} .

2.3. Перевірка критерію зупинки.

Критерієм зупинки є виконання умови $(|W| = 0) \wedge (p > \underline{l})$. Якщо умова не виконується – то кінець алгоритму, упорядкування S побудовано. Інакше $-j := j + 1$; перехід на 2.1.

Етап 3. Зміна параметрів.

На цей етап відбувається перехід у тому випадку, якщо не вдалося побудувати оптимальне упорядкування із заданими значеннями \tilde{l} та \tilde{C} . У цьому випадку необхідно виконати одну з наступних дій.

Якщо був вибір з множини комбінацій, то необхідно на 2.2 обрати іншу комбінацію на відповідній ітерації.

В іншому випадку необхідно змінити один з параметрів задачі. У випадку зміни параметру \tilde{C} перейти на етап 2. Якщо відбулося збільшення параметру \tilde{l} , перейти на 1.3.

Алгоритм описано.

Подальших досліджень потребує питання побудови уточненої оцінки цільової функції (5).

Література

1. Burdiuk V. Ya., Turchyna V. A. (1985) Alhorytmy paralelnoho uporiadkuvannia: navchalnyi posibnyk [Parallel ordering algorithms: tutorial]. Dnipropetrovsk : DDU.

ПРО СИМЕТРИЮ В КОМБИНАТОРИЦІ ТА ЖИВІЙ ПРИРОДІ

Тимофієва Н. К.

Інститут інформаційних технологій та систем НАН України

ON SYMMETRY IN COMBINATORICS AND LIVING NATURE

Nadija Tymofijeva

Institute of Information Technologies and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine

Abstract. In the process of ordering combinatorial sets, symmetries of various types are formed. Accordingly, symmetry is also characteristic of significant combinatorial spaces, which exist in two states: rest (collapsed) and dynamics (expanded). Since the axioms of these spaces are also valid for some natural spaces, studying symmetry in combinatorics can explain how the symmetry of biological forms is formed.

Вступ. В живій та неживій природі існують явища, пов'язані з комбінаторними числами. Це говорить про те, що природі властиві закони комбінаторики. В комбінаторних множинах різних типів в процесі їхнього впорядкування утворюються симетрії різних видів, які характерні і для знакових комбінаторних просторів. Оскільки аксіоми цих просторів справедливі для деяких природних, зокрема біологічних, то досліджуючи їх в комбінаториці можна пояснити, як утворюється симетрія біологічних форм.

В літературі описано багато способів дослідження симетрії як неживої так і живої природи. З цією метою використовують геометричний (зокрема в біології) та алгебраїчний підходи (теорія груп, статистичний аналіз, моделі Маркова). Описують дослідження симетрії розгорнутого біологічного простору з використанням геометрії та біологічного згорнутого (ДНК) з використанням алгебраїчних підходів. Але на запитання, яким чином виникає симетрія в розгорнутих біологічних просторах, відповіді ще не знайдено. Нижче, з використанням знакових комбінаторних просторів показано, яким чином при розгортанні біологічного простору із згорнутого (елементів ДНК) утворюються симетрії в біології (розгорнутого біологічного простору) [1 2].

Постановка задачі. Симетрія проявляється у живій та неживій природі, а також в комбінаториці. Вона досліджується різними підходами.

Оскільки в біології присутні комбінаторні числа, то в статті проведено дослідження симетрії з використанням комбінаторики.

Підхід, що пропонується. З використанням знакових комбінаторних просторів для комбінаторних множин, які характеризуються симетрією, знаходяться комбінаторні числа, які проявляються в біології. На основі цих досліджень пояснюється утворення симетрії в біології.

Математична модель симетрії в комбінаториці. Симетрію досліджують в геометрії та інших розділах математики. В залежності від типу перетворень розрізняють різні її види. Вони можуть бути точними або наближеними. Найпростіші їхні види – дзеркальна та осьова. Але це лише часткові випадки. Деякі симетрії ще не досліджено та не описано. Строге її означення навести також досить складно.

Найбільш простий вид симетрії – дзеркальний, який ґрунтується на рівності двох частин певного об'єкту. Уявна площина, яка ділить такий об'єкт навпіл, називається площиною симетрії. В комбінаториці також наявна симетрія як точна, так і наближена, зокрема вона властива комбінаторним множинам.

Змодельємо симетрію комбінаторних множин, упорядкованими за певними правилами і визначимо кількість у них комбінаторних конфігурацій, які задамо скінченною послідовністю чисел, значення яких збільшуються до найбільшого з них, а потім зменшуються (або зменшуються до найменшого, а потім збільшуються). Площина симетрії, яка проходить через найбільше (або найменше) число послідовності, ділить її на дві частини, значення яких від центру рівномірно зменшуються (або збільшуються), але ці частини необов'язково дзеркально симетричні. Дослідження комбінаторних множин показує що вони характеризуються як наближеною, так і точною симетрією. При точній симетрії уявна площина ділить послідовність чисел по найбільшому (або найменшому) чи проходить між двома найбільшими (або найменшими). Дві розділені частини – дзеркально симетричні. При аналізі комбінаторних множин, які впорядковані за іншими правилами, можна виявити інші симетрії. .

Симетрія комбінаторних конфігурацій. Комбінаторну конфігурацію $w \in W$ подамо упорядкованою послідовністю, для якої існує її симетрична, W – їхня множина. Вважатимемо, що w симетрична, якщо вона збігається сама з собою при русі без деформацій. Існує єдиний спосіб перемістити симетричну послідовність так, щоб вона збіглася з початковою. Це – її поворот на 180^0 ..

Приклад. Для підмножини $W_n \subset W$ неупорядкованого розбиття натурального числа $W_n = (1, 5; 2, 4; 3, 3)$ симетричною є підмножина $\tilde{W}_n = (3, 3; 4, 2; 5, 1)$, яка належить множині \tilde{W} .

Симетрія комбінаторних множин. Множини комбінаторних конфігурацій можуть бути впорядковані або за строгими правилами або хаотично. Симетрія спостерігається в упорядкованих множинах. Існує

скінченне число упорядкованих множин W . Значна їх частина – структурована. Структуровані характеризуються різними видами симетрії як точними, так і наближеними. Такі комбінаторні множини впорядковуються рекурентно-періодичним методом, що ґрунтується на властивості періодичності, яка впливає з рекурентного способу утворення комбінаторних конфігурацій w та полягає в упорядкованні цих множин інтервалами, в кожному з яких w утворюються за одними і тими ж правилами.

Підрахування кількості комбінаторних конфігурацій в упорядкованих за розробленими правилами множинах W проводиться досить просто за методом, описаним у [3]. Скінченна послідовність числових значень цієї кількості визначає наближену або точну симетрію комбінаторної множини певного типу.

Аксіоми знакових комбінаторних просторів. Виходячи з утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій, сформулюємо аксіоми, яким задовольняють знакові комбінаторні простори [1].

1. Знакові комбінаторні простори існують в двох станах: спокої (згорнутий) та динаміці (розгорнутий).

2. Згорнутий простір задається інформаційним знаком $\mathfrak{R} = \langle A, T, \mathfrak{Z}, \Xi \rangle$, який містить властивості розгорнутого простору певного типу, де A – одна або кілька базових множин, з елементів $a_{l_j} \in A_l \subset A$, яких утворюються розгорнуті комбінаторні простори, $j \in \{1, \dots, n\}$, $l \in \{1, \dots, \tilde{q}\}$, \tilde{q} – кількість базових множин; T – тип знакового комбінаторного простору; \mathfrak{Z} – правила розгортання знакового комбінаторного простору; Ξ – правила згортання знакового комбінаторного простору.

3. Утворення із згорнутого розгорнутих знакових комбінаторних просторів проводиться за рекурентними правилами. Точкою розгорнутого простору є комбінаторна конфігурація певного типу. Розгортанню комбінаторного простору характерна властивість періодичності, яка впливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій.

4. Згортання знакового комбінаторного простору певного типу проводиться з точок як одного так і кількох просторів. Згорнутий простір має властивості просторів, з яких він згорнувся.

Зв'язок комбінаторики та біології. В літературі описано багато природних явищ, пов'язаних з комбінаторними числами, зокрема з числами Фібоначчі. При формуванні суцвіття деяких квітів, луски шишок, розміщенні листя дерев та інших рослин утворюються правильні спіралі, число рядів яких збігається з числами Фібоначчі, послідовність яких має вигляд: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, При рості раковин деяких видів моллюсків, рукава галактик, спіраль пелюстків троянди, що розпустилася, утворюють логарифмічну спіраль, яку геометрично можна подати через

“золотий прямокутник”, в якого одна сторона довша в 1,618 разів («золоте» число або золотий перетин $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.6180339887$) [1]. Це говорить про те,

що живій та неживій природі властиві закони комбінаторики. В упорядкованих за певними правилами комбінаторних множинах числові послідовності, які задають у них кількість комбінаторних конфігурацій, також утворюють комбінаторні числа, зокрема і числа Фібоначчі.

Знакові біологічні простори. Виходячи з аксіом 1-4 насінину чи клітину розглянемо як згорнутий біологічний простір, який задамо інформаційним знаком $\mathfrak{R}=\langle A, T, \mathfrak{Z}, \Xi \rangle$, де A – одна або кілька базових множин, елементами яких можуть бути амінокислоти або інші базові біологічні об’єкти, з яких утворюються розгорнуті біологічні простори, T – тип знакового біологічного простору, \mathfrak{Z} – правила розгортання біологічного простору; Ξ – правила згортання простору заданого типу з точок як одного так і кількох просторів. Тобто, згорнутим біологічним простором назвемо інформаційний знак, який містить базові множини і систему правил, за допомогою яких комбінацією елементів цих множин розгортається живий організм. Під дією певних чинників (для рослин – це тепло, волога і земля) утворюється живий об’єкт – розгорнутий біологічний простір, який має здатність до згортання. Точкою знакового біологічного простору може бути як розбиття числа так і розбиття n -елементної множини на підмножини або сполучення без повторень.

Висновок. Отже знаковим біологічним просторам властиві аксіоми знакових комбінаторних просторів і властиві закони комбінаторики. Оскільки для комбінаторних множин певного типу в процесі їхнього впорядкування утворюються комбінаторні числа та прослідковується динаміка утворення симетрії, то досліджуючи її в комбінаториці, можна пояснити природу симетрії біологічних форм.

Література

1. Тимофієва Н.К. (2018) Про комбінаторні числа та симетрію в біології. Штучний інтелект. № 81 (2018’3). С.87–95.
2. Тимофієва Н.К. (2017) Про симетрію комбінаторних множин. УСiМ. № 1 С.3 – 16.
3. Тимофієва Н.К. (2007) Теоретико-числові методи розв’язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ. 32 с.

1 Tymofijeva N.K. (2018) Pro kombinatorni thysla ta symetriju v biologiji. Shtuchny`j intelekt, № 81 (2018’3) S .87–95. [In Ukrainian].

2. Tymofijeva N.K. (2017) Pro symetriju kombinatornyx mnogyn. USiM, 2017. № 1. S. 3 – 16. [In Ukrainian].

3. Tymofijeva N.K. (2007) Teoretyko-thyslovi metody rozvjazannja zadath kombinatorno'j optymizatsiji. Avtoref. dys...dokt. texn. nauk, In-t kibernetiky im. V.M. Glushkova NAN Ukrainy, Kyjiv. 32 s. [In Ukrainian].

**НОВА ТАКТИКА ГРИ ДЛЯ ДІЙ ДВОХ ФОРВАРДІВ
ДЛЯ ГРИ РОБОТІВ У ШТРАФНОЇ ПЛОЩАДЦІ
ФУТБОЛЬНОГО ПОЛЯ**

Микола Фесенко

Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України

**THE NEW TACTIC OF PLAYS FOR ACTIONS A TWO
FORWARDS FOR ROBOTS PLAY IN FINES PLAYGROUNDS OF
PLAYING FIELDS**

Mykola Fesenko

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine

Abstract. The new tactic of plays for actions two forwards for robots play in fines playgrounds of playing fields has been creating. A fragment of a behavior model for a robot soccer player has been constructed. The robot's actions in this fragment pursue two objectives: first, to block the player who is striking the ball; and second, at the moment of the kick, to remove this obstacle-artificially created by its own player-from the ball's path. The constructed fragment of the robot soccer player's behavior model is based on a proposed tactical technique that makes it possible to conceal from the opponent the initial moment of the kick and the initial trajectory of the ball. The design was implemented in State CAD using the VHDL language.

Гра футбол належить до тих видів спорту, що мають своїх уболівальників. Рідко хто зі мужчин хоча би раз у житті не грав у цю гру. Спортивне телебачення також має величезну аудиторію телеглядачів. Тому кожен має свій власний погляд на гру у футбол. Не дивно, що теорія гри не обійшла своєю увагою цю популярну у народі гру. Дуже популярна серед дітей та молоді гра у футбол є масове видовищне спортивне змагання, тобто тимчасовий конфлікт, що обмежено часом та правилами. Видовищна гра призначена для притягування уваги глядачів та поєднання їх у групи уболівальників, що підтримують свої команди. Стратегія та тактика гри у футбол має багато спільного зі сучасними соціальними, політичними та військовими конфліктами, хоча має свої особисті сенс та спрямованість. Командна гра у футбол формує почуття колективу та спрямованість на перемогу. Тому футбольні матчі за участю роботів - це дуже актуально на теперішній час. Роботи – футболісти призначені для виконання своїх дій ногами та головою у складі колективу роботів. Тільки

голкіпери в межах своєї штрафної площадки можуть грати ще й руками. Усі граки мають свої завдання та позиційний простір. У грі беруть участь дві команди по одинадцять гравців у кожній. Ціль гри — забити м'яч в ворота супротивника. Чим більше забито голів, тим краще гра. Але при цьому треба ще й не пропустити м'яча у свої власні ворота. Тому футбольний матч виграє та команда, чії граки забили більше голів, ніж їх супротивник. Ролевий розклад у грі в футбол наступний. Для забивання голів призначені форварди. Протидію форвардам роблять захисники, що допомагають своєму голкіперу захищати власні ворота. Напівзахисники допомагають то власним форвардам, то захисникам, у залежності від гравій ситуації, що складається на футбольному полі. Існують правила гри у футбол, які заборонено порушувати. Кожен матч — це поєдинок між ролевими колективами роботів. Атаки супротивників чергуються з обороною. Існують стратегічні замисли та тактичні прийоми гри. Кожен грок команди має протидіяти у межах правил гракам команди супротивника в реалізації їх ролевих завдань. При міні-футболі розмір поля значно менше, а ролевих позицій усього дві — граки та голкіпери. При цьому кількість гравців зменшується у половину. Модель робота - футболіста частіше будується на формалізації деяких доступних роботу дій професійних футболістів. Стратегія та тактика гри також частково копіюється зі розробок професійних футбольних тренерів. Також існують суто свої робототехнічні нароби, що відрізняються від професійного футболу. Гра обох команд звичайно моделюється зі використанням теорії ігор. Якщо любительській футбол характеризує загальний рівень розвитку фізичної культури у суспільстві, то робототехнічний футбол відображає рівень розвитку науки та техніки у державі, зокрема: теорії ігор, робототехніки, штучного інтелекту. Сучасні тактичні схеми гри в футбол звичайно використовують до трьох форвардів. Перший форвард при цьому частіше других прямує у штрафну та одразу розташовується поблизу до воріт супротивника, тому що очікує передачу йому м'яча. Другий та третій форварди знаходяться трохи далі поза першим форвардом. Така гра тактично будується на першого форварда як командного лідера, а два других підтримують його атакуючи дії. Основним завданням першого форварда є якісний прийом м'яча, що передали йому, та забивання м'яча у ворота супротивника. На перший погляд, у форварда нема таких питань, як у принца датського Гамлета з відомої трагедії У.Шекспіра, тобто “бути чи не бути”? Бити чи не бити по м'ячу у ворота він виконує без усіляких сумнівів, якщо тому нема перешкоди. Якщо захисники супротивника блокують дії першого форварда та не дозволяють йому нанести удар по воротам, то він має відтягнути на себе від воріт декілька захисників, та одночасно віддати голевий пас другому, чи третьому форварду власної команди. Задача другого та третього форвардів полягає у тому, щоб передати м'яча у штрафну площадку супротивника, а потім пересуватися по площадці для відволікання уваги захисників, робити їм перешкоду у виконанні оборонних дій. При цьому другий та третій форварди постійно

шукають для себе вільне місце у штрафній для прийняття голевого пасу та самостійного нанесення удару по воротам супротивника. Але, якщо уважно придивитися та уникнути у проблему, то вона не так проста. Саме тому, що грають у гру не живі істоти зі штучним розумом та штучним зором.

Метою роботи є розробка нової тактики гри роботів у футбол, що доповняє відомі тактичні схеми новими несподіваними тактичними прийомами. Нова тактика гри базується на деяких недоліках сенсорного штучного зору. Поведінка форвардів підшиковується під сенсорне зорове сприйняття інформації голкіпером та його оточенням з команди супротивника. Щодо запропонованої тактики гри, то її можливо було би віднести до прихованої. Наміри форвардів достроково не афішуються гракам супротивника, а, навпаки, приховуються від них до часу їх безпосередньої реалізації, коли протидіяти їм буде вже занадто пізно. З цих позицій розглянемо новий розроблений тактичний прийом для робота — форварда, або звичайного робота - футболіста у міні футболі, де ролей зовсім небагато. Для цього треба урахувати сенсорні особливості зорового сприйняття інформації роботом. Гра роботів відбувається у не дуже швидкому темпі. Тому між прийомом м'яча та послідуочим ударом по ньому виникає затримка у часі. Звичайно роботи тактично запрограмовані так, що атакують того грака супротивника, що володіє м'ячем. Через свою особисту сенсорну систему вони постійно шукають штучним зором такого грака, повертають у різні боки свої сенсорні датчики. Робот - голкіпер також шукає того грака протилежної команди, що володіє м'ячем недалеко від воріт. Саме від нього голкіпер й готується парировати удар у напрямку своїх воріт. Але, якщо цей удар грака супротивника по м'ячу виконаний не по воротам, а зроблений як пас другому граку, то уся увага робота-голкіпера переноситься вже на зоровий пошук того грака, що отримав м'яч у результаті його передачі. Якщо цього грака по будь-яким причинам на протязі лімітного часового інтервалу сенсорною системою голкіпера не знайдено, то робот-голкіпер починає новий пошук в встановленому для нього порядку, наприклад: зліва направо, або спочатку по центру, а потім на одну позицію зліва від нього й на одну позицію праворуч, та так далі. Крім того, звичайно передача м'яча надається тому граку, що знаходиться ближче до воріт супротивника. Така передача м'яча навіть має свою назву — це голевий пас. Замість цієї звичної тактики ми пропонуємо використовувати додатково й зовсім інший тактичний прийом, зокрема: передачу м'яча давати іншому граку, що знаходиться поза тим граком своєї команди, якій знаходиться ближче до воріт супротивника. а, відповідно, й до голкіпера, зробити непрозору перешкоду, тобто сховати за собою того грака своєї команди, котрий у той час приймає м'яча та готується нанести удар по воротам. У той момент, коли підготовка удару цього грака по воротам супротивника закінчена, футболіст, що приховував свого грака, ослобоняє простір для переміщення м'яча в ворота. Одразу після цього форвард, що володіє м'ячем, виконує удар у вільну на той момент частину

воріт супротивника. Розрахунок тут на те, що при цьому граки протилежної команди не встигнуть зробити перешкоду на шляху м'яча в їх ворота. Тому вони змушені пересуватися та робити перешкоду діям форварда тільки з обох боків, а не попереду. У такому випадку голкіпер може не встигнути так швидко побачити навіть сам момент початку удару форварда по м'ячу, тому не у змозі буде парировати цей удар, оскільки початкова траєкторія польоту м'яча залишається щодо нього невідомою. Тобто голкіпер не встигає вірно зреагувати на загрозу.

Існує багато систем автоматизації моделювання та проектування. Футбол — це рухома гра роботів. Для моделювання футбольної гри роботів частіше використовуються моделі узагальнених динамічних систем, об'єктів та процесів, що взаємодіють та змінюються з часом. Для моделювання поведінки роботів — футболістів використовуються методи штучного інтелекту та теорії прийняття рішень. Стратегічний аспект передбачає розвиток цільових довгострокових моделей поведінки Тактико-технічний аспект пов'язаний з розвитком моделей поведінки робота – футболіста в окремих ситуаціях – швидким прийняттям рішень зі багатоплановим аналізом ситуації гри та прогнозуванням її подальшого розвитку. Для аналізу стратегій поведінки робота в складній гравій ієрархічній системі звичайно використовується пошаровий підхід. На кожному рівні ієрархії керує саме його ієрархічний інформаційний зміст та виробляються відповідні керуючі сигнали. Стило розглянемо типової цикл підготовчих дій роботом — футболістом щодо виконання їм обраного способу нанесення удару по м'ячу. С початку він має через свою сенсорну систему оглянути простір гри. При цьому він має зробити свою орієнтацію у просторі гри, побачити своє місце розташування, володаря м'яча на той час гри, граків власної команди та їх розташування, граків супротивника, час гри. Отримав через сенсорну зорову систему таку інформацію, робот має оцінити ситуацію гри та зайняти обрану стратегію поведінки, що адекватна ситуації гри. Далі відбувається прийняття рішення роботом. Потім відбувається найскладніша координація дій робота по нанесенню удару по м'ячу у обране вільне місце воріт супротивника зі збереженням власної рівноваги. Після цього обов'язково треба побачити результат виконаної дії та оцінити його негативні недоліки та позитивну якість. Кожен такий момент гри запам'ятається роботом як зворотний зв'язок досягнутого результату дії та потім використовується у тренуванні, навчанні та виправленні недоліків. Робот-футболіст володіє бібліотекою наборів окремих рухів, що він може виконати на практиці. У процесі гри він через аналіз ситуації гри обирає зі множини рухів ті свої можливі рухи, що від здатен виконати у даний момент гри. В процесі навчання, тренування та гри робот — футболіст має самостійно вирішувати завдання через оперативний пошук потрібних технічних прийомів того самого оптимального варіанту, що найбільш підходить до ситуації на полі гри, та реалізувати його на практиці. Удар м'ячем по воротах супротивника звичайно завершує атаку команди, але, якщо голкіпер відбив м'яча, але не

зловив його, то має відбутися ще добивання м'яча, тобто додаткові удари, за можливістью.

Для моделювання створеного тактичного фрагменту гри робота оберемо систему автоматизації проектування State CAD. Розробимо алгоритм дій робота та виконаємо розмітку алгоритму. Введемо закон функціонування керуючого автомату у редактор системи State CAD (рис. 1). Запускаємо рух фазових точок моделі та виконуємо генерацію коду програми на мові VHDL. На завершення отримаємо генерацію VHDL-коду опису testbench.

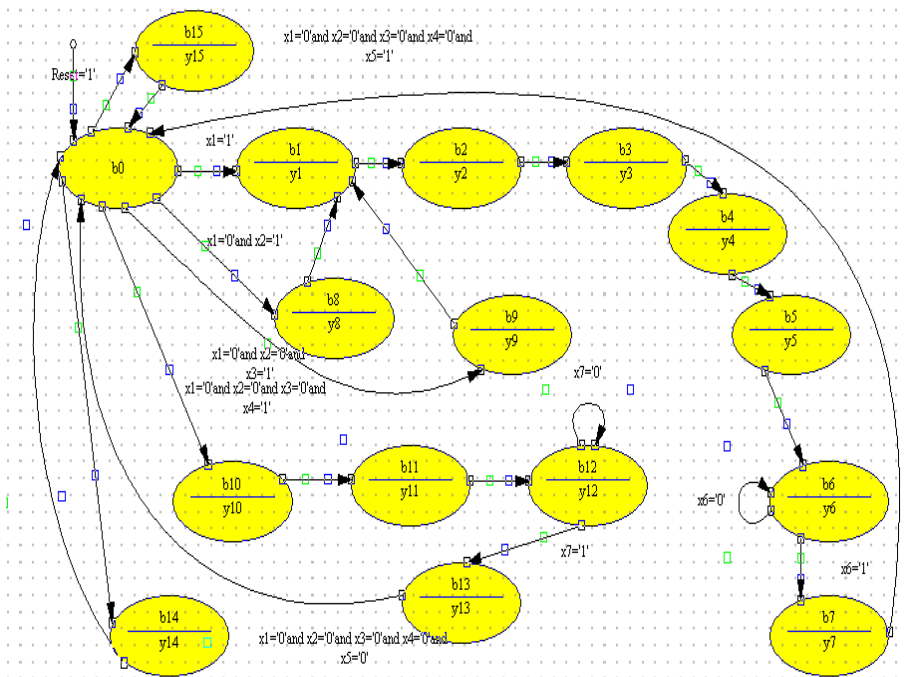


Рис. 1. - Закон функціонування керуючого автомату робота - форварда

Таким чином, згідно нової тактиці створено новий тактичний прийом для сумісних дій двох форвардів безпосередньо у штрафній площадці футбольного поля. Побудовано фрагмент моделі дій робота-футболіста. Дії робота у цьому фрагменті форвардів переслідують дві мети: по перше, заслонити грака, що б'є по м'ячу; и по друге: у момент удару убрати цю штучно створену своїм же граком перешкоду для руху м'яча. В основі побудованого фрагмента моделі дій робота - футболіста лежить запропонований тактичний прийом, що дозволяє сховати від супротивника початковий момент удару та початкову траєкторію руху м'яча. Проектування виконано в State CAD на мові VHDL.

АЛГОРИТМИ ДЛЯ РОБОТИ З ГРАФАМИ

Ірина Філімоніхіна

Центральноукраїнський національний технічний університет

ALGORITHMS FOR WORKING WITH GRAPHS

Iryna Filimonikhina

Central Ukrainian national technic university

Abstract. The most common algorithms for working with graphs are considered. All algorithms are divided into groups based on the purpose of using a particular algorithm. For each algorithm, its main characteristics and areas of application are given.

Алгоритми для роботи з графами представляють собою засоби для обробки структур даних, що мають вигляд графів. Тобто складаються з вершин і ребер. Існує багато алгоритмів для обробки графів. Розглянемо 20 найпопулярніших алгоритмів. Для структуризації поділимо їх на групи згідно з кінцевою метою їх застосування.

1. Базові алгоритми обходу графа:
 - Пошук у глибину (DFS — Depth First Search);
 - Пошук у ширину (BFS — Breadth First Search).
2. Алгоритми найкоротшого шляху:
 - Алгоритм Дейкстри;
 - Алгоритм пошуку найкоротшого шляху;
 - Алгоритм A*;
 - Алгоритм Беллмана-Форда;
 - Алгоритм Джонсона;
 - Алгоритм Флойда-Воршелла.
3. Алгоритми мінімального остового дерева:
 - Алгоритм Крускала;
 - Алгоритм Прима.
4. Алгоритми топологічного сортування
5. Алгоритми пошуку зв'язних компонент графа:
 - Алгоритм зв'язних компонент графа;
 - Алгоритм Тарьяна;
 - Алгоритм Косараджу.
6. Алгоритм Флері пошуку ейлерового шляху
7. Алгоритми пошуку максимального потоку:
 - Простий алгоритм пошуку максимального потоку;
 - Алгоритм Форда-Фулкерсона.
8. Пошукові алгоритми за символами і рядками:
 - Алгоритм Бойера-Мура.
9. Жадібні алгоритми
10. Алгоритми графів з мітками.

Для кожної групи алгоритмів наведемо особливості і області застосування.

Алгоритми обходу вершин графа

1. Пошук в ширину (BFS). Алгоритм обходу починається з кореневого вузла і рухається вниз через суміжні вузли. Цей алгоритм вибирає один вузол графа і відвідує всі суміжні вузли.

Застосування:

- для визначення положень, найближчих до конкретної початкової точки;
- в торрент-застосунках для пошуку сідів (роздавачів завантажених файлів) і пірів (всіх учасників обміну, які ще не мають 100% файлу);
- в веб-пошуках (кожна веб-сторінка виступає вузлом в сітьовому графі).

2. Пошук в глибину (DFS). Це рекурсивний алгоритм з використанням повернення в вихідний вузол, після чого вибирається новий шлях.

Застосування:

- в задачах планування, пошуку циклів в графах, в пошуку розв'язків головоломок з одним розв'язком (судоку, лабіринти, тощо);
- при перевірці графа на дводольність і як підпрограма в алгоритмі Форда-Фулкерсона;
- в задачах пошуку остовних дерев і побудові маршрутів.

Алгоритми найкоротшого шляху

3. Алгоритм Дейкстри – це ітераційний алгоритм, що починається в вихідному вузлі і просувається до цільового вузла. Для кожного нового вузла обчислюється найкоротший шлях до цільового вузла з використанням вже обчислених відстаней між вузлами.

Застосування:

- в задачах обчислення оптимального маршруту між двома вузлами;
- в алгоритмах A^* і Беллмана-Форда;
- в застосунках ШІ (ігри та пошукові системи).

4. Алгоритм пошуку найкоротшого шляху це найпростіший алгоритм обчислення найкоротшого шляху без врахування вартості кожного ребра.

Застосування:

- в комп'ютерних іграх для пошуку найкращого маршруту з однієї точки в іншу;
- в картах для пошуку найкоротшого та/або найдоступнішого за ціною маршруту на автомобілі;
- в системах супутникової навігації (для водіїв).

5. Алгоритм A^* схожий на алгоритм Дейкстри, але враховує вартість кожного ребра.

Застосування:

- в веб-картах та іграх для пошуку найкращого маршруту з однієї точки в іншу з максимальною ефективністю;
 - в застосунках ШІ (в пошукових системах);
 - в інших алгоритмах цієї групи;
 - в сіткових протоколах маршрутизації.
6. **Алгоритм Беллмана-Форда** - це метод пошуку найкоротших шляхів між вихідною вершиною і іншими вершинами в зваженому орієнтованому графі. Працює повільніше, ніж алгоритм Дейкстри, але працює як з додатно, так і від'ємно зваженими ребрами.

Застосування:

- в задачі про максимально зважені паросполучення;
 - в задачах пошуку найкоротших шляхів між всіма парами пар;
 - в хімічних реакціях для обчислення можливих втрат чи отримання тепла;
 - для найбільш ефективної конвертації валют.
7. **Алгоритм Джонсона** застосовується для знаходження найкоротших шляхів між кожною парою вершин орієнтованого зваженого графа. Допускаються від'ємно зважені ребра, але не допускаються цикли з від'ємними вагами. Суть алгоритму полягає в присвоєнні всім ребрам додатних ваг з подальшим застосуванням алгоритма Дейкстри.

Застосування:

- в дослідженні операцій для розв'язування задач аналізу потоків в мережах;
 - в мережах для пошуку найкоротших шляхів між вузлами;
 - в задачах пошуку найкоротшого шляху в інформатиці.
8. **Алгоритм Флойда-Воршелла** схожий на алгоритми Дейкстри і Беллмана-Форда. Відмінність в тому, що обчислює найкоротші відстані для всіх пар вершин.

Застосування:

- в оптимальній маршрутизації для знаходження шляху з максимальним потоком між двома вершинами;
- в мережах для пошуку найкоротших шляхів між двома точками мережі;
- в задачах пошуку найкоротшого шляху між двома вершинами в інформатиці.

Алгоритми мінімального остового дерева

9. **Алгоритм Крускала** починає роботу з об'єднання всіх вершин в дерево. Потім видаляються ребра, які не є частинами мінімального остового дерева.

Застосування:

- проектування залізничних та автомобільних шляхів між населеними пунктами;
- проектування іригаційних каналів;
- розміщення мікрохвильових вишок;

- проектування волоконно-оптичних мереж.
- 10. Алгоритм Прима** призначений для пошуку найкоротшого шляху від заданої вершини до всіх інших. Створюється таблиця відстаней від заданої вершини до всіх інших і найкоротший шлях знаходиться як мінімальний шлях в таблиці.
- Застосування:*
- в задачах при пошуку найкоротших шляхів для зниження затрат (при прокладці кабелів, в локальних мережах, електромережах, газопроводах, водогонах тощо);
 - для пошуку пари елементів найближчих між собою в кластерах з однією зв'язуючою ланкою.
- 11. Алгоритм топологічного сортування** застосовний для визначення порядку відвідування вершин графа.
- Застосування:*
- в інформатиці для розв'язування задач про направлені ациклічні графи;
 - в мережах для створення діаграми потоків даних в мережі;
 - в дослідженні операцій для розв'язування задач на потоки в мережах.
- Алгоритми пошуку зв'язних компонент графа**
- 12. Алгоритм зв'язних компонент графа** – найпростіший алгоритм пошуку зв'язних компонент графа з урахуванням ребер і вершин.
- Застосування:*
- в інформатиці для розв'язування задач про ізоморфізм графів;
 - в мережах для пошуку всіх ізольованих вузлів мережі;
 - в електроніці для пошуку всіх ланцюгів на електронній схемі;
 - при проектуванні СБІС для пошуку всіх з'єднань в топології мікросхеми.
- 13. Алгоритм Тарьяна** застосовується для пошуку сильно зв'язних компонент графа шляхом розбиття з використанням тимчасових міток вузлів в глибину.
- Застосування:*
- в інформатиці для розв'язування задач про зв'язні компоненти;
 - в методі класифікації дводольних графів;
 - в соціальних мережах для знаходження груп людей, тісно пов'язаних між собою і для створення рекомендацій на основі спільних інтересів.
- 14. Алгоритм Косараджу** відрізняється від попереднього методу тим, що граф розбивається з використанням двох DFS.
- Застосування:*
- в інформатиці для розв'язування задач про зв'язні компоненти;
 - в методі класифікації дводольних графів;
 - в соціальних мережах для знаходження груп людей, тісно пов'язаних між собою і для створення рекомендацій на основі спільних інтересів.

15. Алгоритм Флері пошуку ейлерового шляху починається з одного ребра і переміщує суміжні вершини, видаляючи попередні. З кожним кроком граф стає простішим.

Застосування:

- в інформатиці для розв'язування задач про побудову ейлерових шляхів;
- в мережах для пошуку всіх ланцюгів в мережі.

Алгоритми пошуку максимального потоку

16. Алгоритм максимального потоку дозволяє знайти максимально можливий потік між двома вузлами в графі з урахуванням пропускної можливості кожного ребра.

17. Алгоритм Форда-Фулкерсона застосовується для побудови ейлерових шляхів.

18. Алгоритм Бойера-Мура є алгоритмом пошуку за рядком. Використовується для знаходження рядка в більш довшому рядку. Працює шляхом перебору всіх можливих збігів для рядка і подальшої перевірки, и буде цей рядок префіксом довшого рядка.

Застосування:

- для пошуку знаходження слів в текстовому документі;
- редагування текстів, з урахуванням орфографії і виправлення;
- розпізнавання образів (символів на зображенні).

19. Жадібний алгоритм на кожному кроці завжди вибирає найкращий варіант без врахування майбутніх кроків. Зазвичай, алгоритм бере невеликий розв'язок і поступово поліпшує його.

Застосування:

- оптимізація результатів пошуку шляхом впорядкування згідно з деякою евристикою;
- планування задач для обмеженої кількості машин з врахуванням пріоритетності виконання задач;
- вибір підмножини з максимальною кількістю елементів;
- упаковка товарів в контейнер з метою мінімізації транспортних витрат.

20. Алгоритми графів з мітками застосовуються для спрощення ідентифікації вершин і ребер.

Застосування:

- в інформатиці для представлення структур даних (масиви, списки, дерева);
- в мережах для представлення мереж(соціальні, транспортні);
- в математиці для представлення груп і кілець.

Література

1. <https://memgraph.com/blog/graph-algorithms-applications>
2. Bardachov YU., Sokolova N., Khodakov V. (2002) *Dyskretna matematika*. – K.: Vyshcha shkola [In Ukrainian].

3. 2.Yadrenko M. (2002) *Dyskretna matematyka*. – K.: KNU. [In Ukrainian].
4. <https://dou.ua/forums/topic/48433/>
5. M. Bartish, I. Dudzyanyu (2007) *Doslidzhennya operatsiy. CH. 2. Alhorytmny optymizatsiyi na hrafakh* — L'viv: Vydavnychyy tseentr L'vivs'koho natsional'noho universytetu im. I. Franka, [In Ukrainian].
6. Tomas H. Kormen, Charlz E. Leyzerson, Ronald L. Rivest, Kliford Stayn (2019) *Vstup do alhorytmiv*. — K.: K. I. S. [In Ukrainian].

МОДЕЛЬ НЕЧІТКОГО ЛОГІЧНОГО ВИСНОВКУ ДЛЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЕКОЛОГІЧНОГО СТАНУ

Маріанна Шаркаді, Дора Сабов
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

MODEL OF FUZZY LOGICAL INFERENCE FOR MULTI- CRITERIA ASSESSMENT OF ENVIRONMENTAL STATE

Marianna Sharkadi, Dora Sabov
Uzhhorod National University

Abstract. This paper proposes a fuzzy inference model for multi-criteria assessment of environmental state under uncertainty. The approach is based on a Mamdani-type fuzzy system that integrates energy, economic, and social factors using linguistic variables and “IF–THEN” rules. The model enables nonlinear and interpretable evaluation, providing an integral environmental indicator through aggregation and defuzzification. The results demonstrate its effectiveness for capturing complex relationships and supporting decision-making in environmental management and sustainable development.

У сучасних умовах розвитку світової економіки енергетичний сектор відіграє ключову роль у формуванні екологічного стану довкілля. Зростання попиту на енергію, спричинене індустріалізацією, урбанізацією та підвищенням рівня життя населення, супроводжується інтенсивним використанням викопних ресурсів, що призводить до збільшення обсягів викидів парникових газів та інших забруднювальних речовин. У результаті проблема забруднення повітря набуває глобального характеру та потребує застосування ефективних методів оцінювання і прогнозування.

Аналіз сучасних наукових досліджень свідчить про те, що переважна більшість підходів до оцінювання впливу енергетичних факторів на екологічні показники базується на економетричних моделях. Такі моделі дозволяють встановлювати статистичні залежності між змінними, однак вони мають низку суттєвих обмежень. Зокрема, вони передбачають

задання наперед визначеної функціональної форми залежності, що ускладнює адекватне відображення нелінійних процесів. Крім того, економетричні методи недостатньо ефективні при роботі з невизначеними та якісними даними, що є характерними для екологічних систем.

Екологічні процеси формуються під впливом великої кількості взаємопов'язаних факторів, серед яких важливе місце займають енергетичні, економічні та соціальні показники. Взаємодія цих факторів має складний, нелінійний характер і часто супроводжується невизначеністю. У таких умовах доцільним є використання методів нечіткої логіки, які дозволяють формалізувати експертні знання та враховувати нечіткість границь між різними станами системи.

Метою даного дослідження є розробка інтегрованої моделі нечіткого логічного висновку для оцінювання рівня забруднення повітря з урахуванням енергетичних та соціально-економічних факторів, а також проведення класифікації країн за екологічними характеристиками.

Об'єктом дослідження є процес формування інтегрального рівня забруднення повітря. Формально цей процес розглядається у вигляді відображення вхідного простору ознак у вихідний показник. Вхідний вектор має вигляд:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

де x_1 — викиди CO_2 , x_2 — частка відновлюваної енергії, x_3 — рівень енергоспоживання, x_4 — темпи економічного зростання, x_5 — доступ до чистого палива.

Задача полягає у побудові функції:

$$Y = f(X),$$

де Y — інтегральний показник рівня забруднення.

Перед застосуванням моделі здійснюється попередня обробка даних, зокрема їх стандартизація:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j},$$

що забезпечує порівнюваність показників різної розмірності.

Для моделювання використано нечітку систему логічного висновку типу Мамдані, яка є одним із найбільш поширених підходів у задачах нечіткого моделювання. Даний підхід передбачає формалізацію залежностей між змінними у вигляді системи правил типу «IF-THEN», що дозволяє відобразити експертні знання у математичній формі.

На рисунку 1 представлено узагальнену структуру нечіткої системи логічного висновку типу Мамдані, яка використовується для оцінювання інтегрального рівня забруднення повітря.

У лівій частині схеми відображено вхідний блок, що включає основні фактори, які впливають на рівень забруднення, зокрема: викиди CO_2 , частку відновлюваної енергії, рівень енергоспоживання, темпи зростання ВВП та доступ до чистого палива. Зазначені змінні формують

багатовимірний простір ознак, який слугує основою для подальшого моделювання.

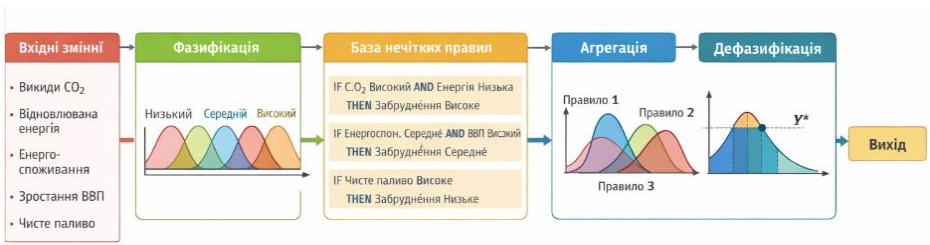


Рис.1 – Структура нечіткої системи логічного висновку

Наступним етапом є фазифікація, у межах якої кожна вхідна змінна перетворюється у нечітку форму за допомогою функцій належності. Як показано на рисунку, використовуються лінгвістичні терми «низький», «середній» та «високий», що дозволяє відобразити нечіткі межі між рівнями показників і забезпечити плавність переходів між ними. На етапі фазифікації кожна змінна подається у вигляді нечітких множин із відповідними функціями належності. У дослідженні використано трикутні функції належності, які мають вигляд:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & x > c. \end{cases}$$

Таке представлення дозволяє описати змінні через лінгвістичні категорії та адекватно врахувати нечіткість їх інтерпретації.

Центральним елементом моделі є база нечітких правил, яка містить продукційні правила типу «IF–THEN». Ці правила відображають логічні залежності між вхідними змінними та вихідним показником і формалізують експертні знання щодо впливу факторів на рівень забруднення.

Ступінь активації кожного правила визначається за допомогою операції мінімуму: $\alpha_k = \min(\mu_{A_1^k}(x_1), \dots, \mu_{A_5^k}(x_5))$.

Далі реалізується етап агрегації, у межах якого результати активованих правил об'єднуються у єдину нечітку множину. Формально цей процес описується як: $\mu_Y(y) = \max_k(\alpha_k \cdot \mu_{B^k}(y))$.

На рисунку цей етап ілюструється накладанням функцій належності, що відповідають окремим правилам.

На завершальному етапі виконується дефазифікація, у результаті якої формується чітке числове значення інтегрального показника. У дослідженні використано метод центроїда:

$$Y^* = \frac{\int y \mu_Y(y) dy}{\int \mu_Y(y) dy}.$$

Отримане значення Y^* інтерпретується як узагальнена оцінка рівня забруднення повітря.

Таким чином, представлена структура забезпечує послідовне перетворення вхідних даних у кінцевий результат і дозволяє враховувати невизначеність та нелінійність досліджуваних процесів. Отриманий інтегральний показник відображає комплексний вплив енергетичних, економічних та соціальних факторів. Аналіз результатів показав, що залежність між економічним розвитком і рівнем забруднення не є лінійною, що підтверджує багатофакторний характер екологічних процесів. Встановлено, що збільшення частки відновлюваної енергії не завжди призводить до зниження рівня забруднення, оскільки цей вплив залежить від інших факторів, зокрема доступу до чистого палива.

Для подальшого аналізу результатів застосовано методи кластеризації. Зокрема, використано алгоритм k-середніх, який мінімізує функціонал:

$$J = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \|x_i - c_j\|^2.$$

Це дозволило виділити групи країн із подібними екологічними характеристиками та визначити типові моделі енергетично-екологічного розвитку.

Отримані результати свідчать про те, що запропонований підхід забезпечує більш гнучке та інтерпретоване моделювання порівняно з класичними методами. Використання нечіткої логіки дозволяє враховувати невизначеність та забезпечує плавні переходи між рівнями змінних, що відповідає природі екологічних процесів.

Таким чином, розроблена модель може бути використана як інструмент підтримки прийняття рішень у сфері енергетичної політики та сталого розвитку. Практична цінність дослідження полягає у можливості застосування отриманих результатів для оцінювання екологічного стану, формування стратегій декарбонізації та підвищення ефективності управління енергетичними системами.

Література

1. Zadeh, L. A. (1965). *Fuzzy sets*. Information and Control, 8(3), 338–353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
2. Jang, J.-S. R. (1993). *ANFIS: Adaptive-network-based fuzzy inference system*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 23(3), 665–685. <https://doi.org/10.1109/21.256541>

3. Chao, B., & Qiu, H. G. (2024). *Air pollution concentration fuzzy evaluation based on evidence theory and the K-nearest neighbor algorithm*. *Frontiers in Environmental Science*, 12. <https://doi.org/10.3389/fenvs.2024.1243962>

4. Deng, W., Meng, T., Kharuddin, S., Ashhari, Z. M., & Zhou, J. (2024). *The impact of renewable energy consumption, green technology innovation, and FDI on carbon emission intensity*. *Journal of Cleaner Production*, 483, 144310. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2024.144310>

АБСТРАКТНИЙ МЕТОД СПРОЩЕННЯ ЛОГІЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ОСНОВІ ДИСТРИБУТИВНОГО ЗАКОНУ БУЛЕВОЇ АЛГЕБРИ

Михайло Соломко

*Національний університет водного господарства та
природокористування*

ABSTRACT METHOD OF SIMPLIFYING LOGICAL FUNCTIONS BASED ON THE DISTRIBUTIVE LAW OF BOOLEAN ALGEBRA

Abstract. The object of the study is the evolutionary process of formation and application of the distributive law of Boolean algebra in the form of an abstract method of simplifying logical functions. The rules of equivalent transformations of logical expressions based on the clause multiplication operation are determined. This initiates a method of mastering the algorithm for simplifying logical expressions, which is based on abstraction, when the thinking mechanism focuses on what the algorithm does, and not on how it does it. The peculiarity of abstract simplification is the absence of a solution plan. Algorithm management focuses on its functional purpose, and not on the details of implementation. Empirical verification is used to establish the reliability of the result of simplifying functions. Experimental studies have confirmed that the abstract method, which uses the clause multiplication operation, increases the efficiency of simplifying Boolean functions, compared to analogues, by 100–200%. In applied terms, the abstract method of simplifying Boolean functions will ensure the transfer of innovations into material production: from conducting fundamental research, expanding the capabilities of digital component design technology to organizing serial or mass production of new products.

Еволюційний процес дистрибутивного закону булевої алгебри засвідчує його універсальність та актуальність. Від теоретичних основ ХІХ століття до сучасних AI-підходів, закон залишається центральним інструментом для логічної оптимізації (табл. 1).

Таблиця 1. Еволюційний процес дистрибутивного закону булевої алгебри

Період	Дослідники / Праці	Внесок
1847–1854	Джордж Буль – <i>The Mathematical Analysis of Logic</i> (1847), <i>An Investigation of the Laws of Thought</i> (1854)	Формулює основні закони булевої алгебри, включно з дистрибутивним. Вперше застосовує його послідовно для розкладання виразів.
1880–1913	Чарльз С. Пірс (1880), Едвард Гантінгтон (1904–1913)	Пірс використовує послідовне застосування дистрибутивності для побудови нормальних форм. Гантінгтон аксіоматизує булеву алгебру, де дистрибутивність стає базовим законом.
1938	Клод Шеннон – <i>A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits</i>	Переносить булеву алгебру у схемотехніку. Послідовне застосування дистрибутивності використовується для аналізу та синтезу релейних схем.
1953–1956	Моріс Карно (1953), Едвард Мак-Класкі (1956)	Розробляють методи мінімізації булевих функцій (карти Карно, метод Мак-Класкі). Обидва методи фактично реалізують послідовне розкриття виразів через дистрибутивність.
1970–2000	Розвиток теорії алгоритмів та логічної оптимізації	Послідовне застосування дистрибутивності використовується у перетвореннях до ДНФ/КНФ для автоматизації доведень та оптимізації схем.
2000–2020	SAT-розв’язувачі – роботи Маркес-Сілви, Ігнат’єва, Моргадо	Алгоритми SAT-аналізу систематично використовують дистрибутивність для перетворення формул у КНФ, що є стандартом у сучасній теорії обчислень.
Сьогодні	Сучасні дослідження у комбінаторній оптимізації та штучному інтелекті	Послідовне застосування дистрибутивного закону застосовується для побудови SAT-моделей, оптимізації логічних виразів та перевірки властивостей систем.

З огляду табл. 1 видно, що розвиток та застосування дистрибутивного закону демонструє інтеграцію класичних математичних принципів з новітніми технологіями, практичні приклади яких включають оптимізацію цифрових схем, діагностичних моделей та комбінаторних задач у різних технологічних галузях (рис. 1).

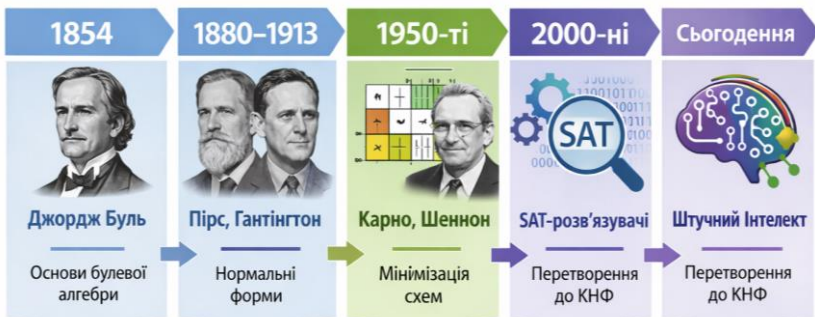


Рис. 1. Застосування дистрибутивного закону у різні епохи

Головним рушієм появи SAT-розв'язувачів став збіг двох обставин: з одного боку, традиційні методи мінімізації досягли своєї межі, а з іншого – відбувся значний прогрес у розробці самих SAT-розв'язувачів. Перші практичні результати показали величезну перевагу нового підходу. Наприклад, розроблений у 2003 році мінімізатор SAT-ESPRESSO, який використовував SAT-розв'язувач як основний механізм, працював у 5-20 разів швидше, ніж класичний ESPRESSO-II, і в 3-5 разів швидше за інший тогочасний інструмент BOOM на наборі великих тестових схем [1].

Використання SAT-розв'язувачів для мінімізації булевих функцій є потужним підходом, однак він не позбавлений істотних недоліків. Зокрема, застосування SAT-розв'язувачів пов'язане з низкою безпосередніх обмежень швидкості та масштабованості:

- "Експоненційний вибух": процес перебору простих імплікант для пошуку мінімальної форми може призвести до лавиноподібного зростання їх кількості. Тому цей підхід часто неможливо застосувати для функцій з великою кількістю змінних [2].

- Методи точного синтезу на основі SAT, попри гарантію оптимальності, стикаються з різким збільшенням часу розв'язку зі зростанням кількості логічних елементів. Це робить їх непридатними для оптимізації великих сучасних цифрових схем, обмежуючи застосування лише невеликими булевими функціями [3].

AI/SAT/QBF-методи мінімізації булевих функцій застосовуються у сучасних системах автоматизованого проектування цифрових мікросхем (EDA). Зазначені методи використовуються під час logic synthesis, formal verification та exact synthesis для зменшення площі кристалу, енергоспоживання та затримок цифрових схем [4].

AI-методи для спрощення булевих функцій мають помітні переваги, але також і суттєві недоліки. Зокрема: відсутність гарантії глобального оптимуму, відсутність explainability, проблема reproducibility, AI часто програє SAT/QBF exact методам, висока обчислювальна вартість навчання. Саме тому для сучасних EDA-систем AI зазвичай використовується як

допоміжний heuristic-компонент, тоді як формальну коректність забезпечують SAT/QBF/SMT-методи [5].

Послідовне застосування дистрибутивного закону булевої алгебри

Вираз

$$\overline{x_1 x_2 x_3} + \overline{x_1 x_2 x_3} = \overline{(x_1 + x_1)(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_2)(x_2 + x_2)(x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_3 + x_3)} \quad (1)$$

демонструє послідовне застосування дистрибутивного закону булевої алгебри. Послідовне застосування дистрибутивного закону означає використання дистрибутивності не один раз, а декілька разів підряд для розкриття складних логічних виразів. Це дає змогу перетворювати логічні формули у більш просту або стандартну форму (наприклад, ДНФ чи КНФ). Ліва частина рівняння (1) представляє досконалу диз'юнктивну нормальну форму (ДДНФ), права частина представляє досконалу кон'юнктивну нормальну форму (ДКНФ). У загальному випадку ліва і права частини рівняння (1) можуть бути у ДНФ і КНФ.

Для рівняння (1) зліва знаходиться сума добутоків (ДНФ), а справа – добуток формул (КНФ) – добуток клауз (макстермів). ДНФ і КНФ це два різні канонічні способи запису однієї й тієї ж булевої функції. Вони утворюються через різні дистрибутивні закони:

- ❖ ДНФ – через дистрибутивність кон'юнкції відносно диз'юнкції (закон 1-го роду).

- ❖ КНФ – через дистрибутивність диз'юнкції відносно кон'юнкції (закон 2-го роду).

Дистрибутивні закони у булевій алгебрі описують операції кон'юнкції (AND) і диз'юнкції (OR) та їх розподілення одна відносно іншої. Вони є фундаментальними для спрощення логічних виразів і побудови цифрових схем.

Таким чином, права частина рівняння (1) є еквівалентним розкладом лівої частини, отриманим через послідовне застосування:

- ❖ дистрибутивного закону 1-го роду
- ❖ дистрибутивного закону 2-го роду
- ❖ а також законів ідемпотентності та доповнення.

Операція множення клауз – послідовне застосування дистрибутивного закону (1) наслідуює правила класичної алгебри логіки основного базису.

Правила рівносильного перетворення на основі множення клауз

Реалізація операції однозначності змінних:

$$\begin{aligned} \overline{x_1 x_2 x_3} + \overline{x_1 x_2 x_3} &= \overline{(x_1 + x_1)(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_2)(x_2 + x_2)(x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_3 + x_3)} = \\ &= \overline{(x_1)(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2)(x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_3)} = \overline{x_1 x_2 x_3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Множення клауз реалізує операцію однозначності змінних для двох однакових термів ДНФ (2).

Якщо у логічному виразі ДНФ серед різних термів є однакові терми реалізація операції однозначності змінних на основі множення клауз має такий, наприклад, вигляд

$$\begin{aligned} & x_1x_2 + x_1x_2 + x_3x_4 = \\ & = (x_1 + x_1)(x_1 + x_2)(x_1 + x_2)(x_2 + x_2) + x_3x_4 = (x_1 + x_1 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)(x_2 + x_2 + x_3) \times \\ & \times (x_1 + x_1 + x_4)(x_1 + x_2 + x_4)(x_1 + x_2 + x_4)(x_2 + x_2 + x_4) = (x_1 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)(x_2 + x_3) \times \\ & \times (x_1 + x_4)(x_1 + x_2 + x_4)(x_1 + x_2 + x_4)(x_2 + x_4) = (x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4). \end{aligned} \quad (3)$$

Останній вираз у (3) можна спрощувати:

$$(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = (x_1x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_4) = x_1x_2 + x_3x_4.$$

Отже

$$x_1x_2 + x_1x_2 + x_3x_4 = x_1x_2 + x_3x_4. \quad (4)$$

Операція множення клауз забезпечує однозначність змінних навіть у випадку повторення термів у ДНФ (результат (4)).

Реалізація операції простого склеювання змінних має вигляд

$$\begin{aligned} & \overline{x_1x_2x_3x_4} + \overline{x_1x_2x_3x_4} = \\ & = (\overline{x_1 + x_1})(\overline{x_1 + x_2})(\overline{x_1 + x_3})(\overline{x_1 + x_4})(\overline{x_1 + x_2})(\overline{x_2 + x_2})(\overline{x_2 + x_3})(\overline{x_2 + x_4}) \times \\ & \times (\overline{x_1 + x_3})(\overline{x_2 + x_3})(\overline{x_3 + x_3})(\overline{x_3 + x_4})(\overline{x_1 + x_4})(\overline{x_2 + x_4})(\overline{x_3 + x_4})(\overline{x_4 + x_4}) = \\ & = \overline{x_1(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_1 + x_2)x_2(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)} \times \\ & \times (\overline{x_1 + x_3})(\overline{x_2 + x_3})\overline{x_3(x_3 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)} = \overline{x_1x_2x_3}. \end{aligned}$$

Отже

$$\overline{x_1x_2x_3x_4} + \overline{x_1x_2x_3x_4} = \overline{x_1x_2x_3}. \quad (5)$$

Множення клауз реалізує операцію простого склеювання змінних (5).

Реалізація операції супер-склеювання змінних на основі множення клауз має вигляд

$$\overline{x_1x_2x_3} + \overline{x_1x_2x_3} + \overline{x_1x_2x_3} + \overline{x_1x_2x_3} = \overline{x_3}. \quad (6)$$

Реалізація операції неповного супер-склеювання змінних на основі множення клауз має вигляд

$$\overline{x_1x_2x_3} + \overline{x_1x_2x_3} + \overline{x_1x_2x_3} = \overline{x_1x_3} + \overline{x_2x_3}. \quad (7)$$

Реалізація операції напівсклеювання змінних на основі множення клауз має вигляд

$$\overline{x_1x_2} + \overline{x_1x_2x_3} = \overline{x_1x_2} + \overline{x_1x_3}. \quad (8)$$

Реалізація операції поглинання змінних на основі множення клауз має вигляд

$$\overline{x_1x_3} + \overline{x_1x_2x_3} = \overline{x_1x_3}. \quad (9)$$

Правила рівносильного перетворення, які реалізує операція множення клауз, представлено у табл. 2.

Таблиця 2. Логічні операції на основі множення клауз для функцій основного базису

№ з/п	Назва логічної операції	Номер посилання у тексті	Форма представлення
1	Однозначність змінних	(2) – (4)	ДНФ
2	Просте склеювання змінних	(5)	ДНФ
3	Супер-склеювання змінних	(6)	ДНФ
4	Неповне супер-склеювання змінних	(7)	ДНФ
5	Напівсклеювання змінних	(8)	ДНФ
6	Поглинання змінних	(9)	ДНФ

Споглядаючи табл. 2 бачимо, що єдина логічна операція – множення клауз репрезентує формальний логічний зв'язок, який визначає значення істинності – як то AND чи OR та реалізує правила алгебри логіки згідно з табл. 2.

Абстрактний метод прощення булевих функцій основного базису

Аналітичний метод для спрощення функцій ґрунтується на рівносильних перетвореннях за допомогою законів і тотожностей алгебри логіки та визначається рефлексивним мисленням, як вербальний процес у формі слово-роздільного контексту. Послідовність стандартної процедури спрощення булевих функцій є необхідно детермінованою у власній визначеності своїх кроків відображення аналітичного методу.

Аналітичний метод є трудомісткий і не дає жодних гарантій отримати необхідний мінімум, оскільки прямої ознаки досягнення мінімальної тупикової форми ні аксіоми, ні закони алгебри логіки не дають. Наявність мінімальної форми можна визначити лише у простих випадках, коли кількість варіантів процедури пошуку не перевищує двох – трьох, а глибина завершеного пошуку обмежена приблизно такою ж кількістю кроків. Ці оцінки багато в чому залежать від інженерного досвіду виконавця. Своєю чергою відсутність алгоритму не завжди гарантує, що отриманий вираз булевої функції буде оптимальним і подальше його спрощення неможливе

Другий спосіб освоєння алгоритму спрощення логічних виразів, відрізняється від стандартної процедури. Він представляє собою дещо інше, як деякий автономний спосіб розуміння та ґрунтується на абстракції, коли механізм мислення зосереджує на тому, що робить алгоритм, а не на тому, як він це робить. Це спрощує алгоритм і дає змогу розглядати його у «чистому вигляді». Послідовне застосування дистрибутивного закону булевої алгебри (1) підтримує абстрактний алгоритм, а правила рівносильного перетворення (табл. 2) забезпечують результат спрощення логічних виразів.

Потрібно зазначити, що у переліку правил табл. 2 відсутня операція узагальненого склеювання змінних. Для її виявлення застосовується окрема процедура.

Приклад 1. Булева функція $f(x_1, x_2, x_3)$ задана у ДНФ [6]

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3}. \quad (10)$$

На основі множення клауз спростити функцію (10).

Розв'язок:

$$\begin{aligned} f_{CNF \min}(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= x_1 x_2 x_3 + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} = \\ &= (x_1 + \overline{x_1})(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(\overline{x_1} + x_2)(x_2 + x_2)(x_2 + x_3)(\overline{x_1} + x_3)(x_2 + x_3)(x_3 + x_3) + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} = \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(\overline{x_1} + x_2)(x_2)(x_2 + x_3)(\overline{x_1} + x_3)(x_3) + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} = \\ &= (x_2)(x_3) + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} = \\ &= (x_2 + x_1)(x_3 + x_1)(x_2 + \overline{x_2})(x_3 + \overline{x_2})(x_2 + x_3)(x_3 + x_3) + x_1 x_2 \overline{x_3} = \\ &= (x_2 + x_1)(x_3 + x_1)(x_3 + \overline{x_2})(x_2 + x_3)(x_3) + x_1 x_2 \overline{x_3} = \\ &= (x_2 + x_1)(x_3) + x_1 x_2 \overline{x_3} = \\ &= (x_2 + x_1 + x_1)(x_3 + x_1)(x_2 + x_1 + x_2)(x_3 + x_2)(x_2 + x_1 + \overline{x_3})(x_3 + \overline{x_3}) = \\ &= (x_2 + x_1)(x_3 + x_1)(x_2 + x_1)(x_3 + x_2)(x_2 + x_1 + \overline{x_3}) = \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3). \end{aligned}$$

Мінімальна КНФ функції (10) має вигляд:

$$f_{CNF \min}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3). \quad (11)$$

Мінімальна функція у змішаному базисі (диз'юнктивно – кон'юнктивна форма) має вигляд:

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = (x_1 + x_2 x_3)(x_2 + x_3). \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2 x_3)(x_2 + x_3) = \\ &= x_1 x_2 + x_2 x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_2 x_3 x_3 = \\ &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3. \end{aligned}$$

Мінімальна функція у ДНФ має вигляд:

$$f_{DNF \min}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3. \quad (13)$$

Отже логічне множення клауз реалізує спрощення булевої функції (10) з результатом (11)–(13). Результат (10) співпадає з [6].

На відміну від AI/SAT/QBF-методів мінімізації булевих функцій, особливість абстрактного спрощення полягає у відсутності плану розв'язку. Управління алгоритмом акцентує увагу на його функціональному призначенні, а не на деталях реалізації. Достовірність результату спрощення функцій визначається емпіричною верифікацією.

Приклад 2. Абстрактним спрощенням отримати мінімальну КНФ функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, що задана у канонічній формі [7]:

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \\ &= \sum(0, 1, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 22, 23, 38, 39, 48, 49, 53, 54, 55, 58, 62, 86, 87, 102, 103, 122). \end{aligned} \quad (14)$$

Примітка: значення в Σ є мінтерми таблиці істинності, для яких функція $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ повертає «1» на виході.

Розв'язок.

Мінімальна ДНФ функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ (14) має вигляд [7, 8]:

$$\begin{aligned} f_{\text{МДНФ}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \\ = \overline{x_1 x_2 x_3 x_5 x_6 x_7} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_1 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \\ + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7}. \end{aligned} \quad (15)$$

Результат множення клауз 1-го і 2-го мінтермів (15) має вигляд:

$$\begin{aligned} f_{\text{МКНФ}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \overline{(x_1)(x_2)(x_3)(x_5 + x_7)(x_6)(x_7 + x_4)} + \\ + \overline{x_1 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \\ + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7}. \end{aligned}$$

Результат множення клауз 3-го мінтерму (15) має вигляд:

$$\begin{aligned} f_{\text{МКНФ}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \overline{(x_1)(x_6 + x_4)(x_7 + x_4)(x_6 + x_5)(x_2 + x_6)(x_3 + x_4)(x_5 + x_7 + x_6)} + \\ + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \\ + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7}. \end{aligned}$$

Результат множення клауз 4-го мінтерму (15) має вигляд:

$$\begin{aligned} f_{\text{МКНФ}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \overline{(x_1)(x_4 + x_2)(x_2 + x_6)(x_4 + x_3)(x_3 + x_6)(x_6 + x_5 + x_4)} \times \\ \times \overline{(x_5 + x_7 + x_6)(x_7 + x_4)} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \\ + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7}. \end{aligned}$$

Результат множення клауз 5-го мінтерму (15) має вигляд:

$$\begin{aligned} f_{\text{МКНФ}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \overline{(x_1)(x_3 + x_6 + x_2)(x_2 + x_6 + x_3)(x_4 + x_2)(x_4 + x_3)} \times \\ \times \overline{(x_7 + x_4)(x_2 + x_6 + x_5)(x_5 + x_7 + x_6)(x_6 + x_5 + x_4)} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \\ + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7}. \end{aligned}$$

Результат множення клауз 6-го мінтерму (15) має вигляд:

$$\begin{aligned} f_{\text{МКНФ}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \overline{(x_1)(x_3 + x_6 + x_2)(x_2 + x_6 + x_3)(x_4 + x_2)(x_4 + x_3)} \times \\ \times \overline{(x_7 + x_4)(x_6 + x_5 + x_4)(x_5 + x_7 + x_6)} + \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6 x_7} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \\ + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7}. \end{aligned}$$

Результат множення клауз 7-го мінтерму (15) має вигляд:

$$\begin{aligned} f_{\text{МКНФ}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \\ = \overline{(x_1)(x_3 + x_6 + x_2)(x_4 + x_3 + x_2)(x_2 + x_6 + x_3)(x_4 + x_2 + x_3)(x_6 + x_5 + x_4)} \times \\ \times \overline{(x_4 + x_2 + x_6)(x_5 + x_7 + x_6)(x_7 + x_4)} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7}. \end{aligned}$$

Результат множення клауз 8-го мінтерму (15) має вигляд:

$$\begin{aligned} f_{\text{МКНФ}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \\ = \overline{(x_1 + x_2)(x_2 + x_6 + x_3)(x_4 + x_2 + x_6)(x_1 + x_3)(x_4 + x_2 + x_3)(x_1 + x_4)} \times \\ \times \overline{(x_4 + x_3 + x_2)(x_7 + x_4)(x_1 + x_5)} \times \overline{(x_6 + x_5 + x_4)(x_1 + x_6)(x_3 + x_6 + x_2)(x_5 + x_7 + x_6)} + \\ + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} + \overline{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7}. \end{aligned}$$

Результат множення клауз 9-го мінтерму (15) має вигляд:

$$f_{МКНФ}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) =$$

$$= (\overline{x_1 + x_3 + x_2})(\overline{x_4 + x_3 + x_2})(\overline{x_3 + x_6 + x_2})(\overline{x_1 + x_2 + x_3})(\overline{x_4 + x_2 + x_6})(\overline{x_4 + x_2 + x_3}) \times$$

$$\times (\overline{x_1 + x_2})(\overline{x_7 + x_4})(\overline{x_1 + x_5}) \times (\overline{x_6 + x_5 + x_4})(\overline{x_2 + x_6 + x_3})(\overline{x_1 + x_6})(\overline{x_5 + x_7 + x_6}) + x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7.$$

Спрощення макстермів КНФ після кожного множення клауз n і $n+1$ мінтермів ДНФ (15) є підзадача спрощення функції. Складність підзадачі суттєво менша, порівняно зі складністю спрощення всієї функції. Множення клауз останнього мінтерму ДНФ має найбільшу складність.

Результат множення клауз 10-го мінтерму (15) має вигляд:

$$f_{МКНФ}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) =$$

$$= (\overline{x_1 + x_3 + x_2})(\overline{x_4 + x_3 + x_2})(\overline{x_3 + x_6 + x_2})(\overline{x_1 + x_4 + x_2})(\overline{x_1 + x_5 + x_2}) \times$$

$$\times (\overline{x_4 + x_2 + x_3})(\overline{x_1 + x_4 + x_3})(\overline{x_1 + x_5 + x_3})(\overline{x_2 + x_6 + x_3}) \times$$

$$\times (\overline{x_1 + x_2 + x_3 + x_4})(\overline{x_1 + x_5 + x_4})(\overline{x_6 + x_5 + x_4}) \times$$

$$\times (\overline{x_1 + x_2 + x_3 + x_5})(\overline{x_1 + x_4 + x_5}) \times$$

$$\times (\overline{x_4 + x_2 + x_6})(\overline{x_1 + x_6})(\overline{x_5 + x_7 + x_6}) \times$$

$$\times (\overline{x_1 + x_2 + x_3 + x_7})(\overline{x_7 + x_4})(\overline{x_1 + x_5 + x_7}) =$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	1	1				
	1	0			1	
	1	0	0			
0	1		0			
0	1			1		
	0	1	0			
0		1	0			
	0	1			1	
0		1		1		
	0		0		1	
0	0	0	1			
0			1	1		
			1	1	0	
0	0	0		0	ϵ	
0			0	0		
				0	1	1
0					1	
0	0	0			ϵ	0
			0			0
0				1		0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	1	1				
	1	0			1	
	1	0	0			
	0	1	0			
	0	1			1	
	0		0		1	
0	0	0	1			
			1	1	0	
0		0	0			
0				0	1	1
0					1	
				0		0

$$= (\overline{x_1 + x_3 + x_2})(\overline{x_4 + x_3 + x_2})(\overline{x_3 + x_6 + x_2})(\overline{x_4 + x_2 + x_3})(\overline{x_2 + x_6 + x_3})(\overline{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}) \times$$

$$\times (\overline{x_6 + x_5 + x_4})(\overline{x_1 + x_4 + x_3})(\overline{x_4 + x_2 + x_6})(\overline{x_1 + x_6})(\overline{x_5 + x_7 + x_6})(\overline{x_7 + x_4}).$$

Мінімальна КНФ функції (14) має вигляд:

$$f_{\text{МКНФ}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (\overline{x_1 + x_3 + x_2})(\overline{x_4 + x_3 + x_2})(\overline{x_3 + x_6 + x_2})(\overline{x_4 + x_2 + x_3})(\overline{x_2 + x_6 + x_3})(\overline{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}) \times (\overline{x_6 + x_5 + x_4})(\overline{x_1 + x_4 + x_5})(\overline{x_4 + x_2 + x_6})(\overline{x_1 + x_6})(\overline{x_5 + x_7 + x_6})(\overline{x_7 + x_4}). \quad (16)$$

КНФ (16) на два макстерми менша, порівняно з мінімальною КНФ [8].

Таксомонія методів спрощення булевих функцій

Наступний приклад демонструє аналітичний (стандартний), образний та абстрактний способи спрощення булевих виразів, які представляють рефлексивний, континуальний та абстрактний механізми мислення для розв'язку булевих задач.

Приклад 3. Перевірити справедливність рівності [9]:

$$\overline{ab} + c + \overline{acd} + \overline{bcd} = c + \overline{ab} + d. \quad (17)$$

Розв'язок:

Аналітичне доведення за стандартною методикою подається у такій формі. До лівої частини виразу (17) застосовується теорема розкладання Буля–Шеннона – $a + f(a, \overline{a}, b, c, \dots, w) = a + f(1, 0, b, c, \dots, w)$ [10].

$$\overline{ab} + c + \overline{acd} + \overline{bcd} = \overline{ab} + c + \overline{ald} + \overline{bld} = \overline{ab} + c + \overline{ad} + \overline{bd}. \quad (18)$$

До виразу (18) застосовується дистрибутивний закон і закон де Моргана.

$$\overline{ab} + c + \overline{ad} + \overline{bd} = \overline{ab} + c + d(\overline{a} + \overline{b}) = c + \overline{ab} + d(\overline{ab}) \quad (19)$$

До двох останніх термів (19) застосовується поглинання змінних $a + \overline{ab} = a + b$. Остаточоно буде отримано:

$$c + \overline{ab} + d(\overline{ab}) = c + \overline{ab} + d. \quad (20)$$

Результат перетворення (20) лівої частини виразу (17) співпадає з правою частиною (17). Справедливність рівності (17) аналітичним методом доведено [9].

Доведення справедливості рівності (17) методом образних перетворень подано у наступній формі:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \\ & 1 & & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & 1 & & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d \\ \hline 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & 1 \\ \hline \end{array} \quad (21)$$

$$= c + \overline{ab} + d.$$

У першій матриці (21) проведено напівсклеювання змінних:

$$c + \overline{acd} + \overline{bcd} = c + \overline{ad} + \overline{bd}. \quad (22)$$

Результат (22) записано до другої матриці (21). У другій матриці (21) проведено узагальнене склеювання змінних:

$$\overline{ab} + \overline{ad} = \overline{ab} + \overline{ad} + \overline{bd}. \quad (23)$$

Результат (23) записано до третьої матриці (21). У третій матриці (21) проведено просте склеювання змінних:

$$\overline{bd} + bd = d. \quad (24)$$

Результат (24) записано до четвертої матриці (21). У четвертій матриці (21) проведено поглинання змінних:

$$\overline{ad} + d = d. \quad (25)$$

Результат операції поглинання змінних (25) записано до п'ятої матриці (21).

Справедливість рівності (17) методом образних перетворень доведено. Кожна логічна операція (22) – (25) на візуально-матричній формі (21) має ілюстрацію образу, у вигляді незрівноважених комбінаторних систем 2-(n, x/b)-design [11]. Виявлення на основі пошуку потрібних інтервалів булевого простору, що вміщують комбінаторні образи (комбінаторні системи), однозначно імплікує локації рівносильних перетворень. Це забезпечує «пускову причинність» наслідку, у вигляді само розв'язку булевої задачі візуально-матричною формою (21) аналітичного методу [12].

Доведення справедливості рівності (17) абстрактним спрощенням булевих виразів зводиться до застосовується логічного множення клауз у лівій частині виразу (17):

$$\begin{aligned} \overline{ab} + c + \overline{acd} + \overline{bcd} &= \\ &= (a+c)(\overline{b}+c) + \overline{acd} + \overline{bcd} = \\ &= (a+c+\overline{a})(\overline{b}+c+\overline{a})(a+c+\overline{c})(\overline{b}+c+\overline{c})(a+c+d)(\overline{b}+c+d) + \overline{bcd} = \\ &= (\overline{b}+c+\overline{a})(a+c+d)(\overline{b}+c+d) + \overline{bcd} = \\ &= (\overline{b}+c+\overline{a}+b)(a+c+d+b)(\overline{b}+c+d+b) \times \\ &\times (\overline{b}+c+\overline{a}+\overline{c})(a+c+d+\overline{c})(\overline{b}+c+d+\overline{c}) \times \\ &\times (\overline{b}+c+\overline{a}+d)(a+c+d+d)(\overline{b}+c+d+d) = \\ &= (a+c+d+b)(\overline{b}+c+\overline{a}+d)(a+c+d)(\overline{b}+c+d) = \\ &= (a+c+d)(\overline{b}+c+d) = \\ &= c+d+\overline{ab}. \end{aligned}$$

На відміну від аналітичного доведення, особливість абстрактного спрощення булевих функцій полягає у відсутності плану розв'язку. Застосовується єдина операція – множення клауз відповідних термів логічного виразу. Це визначає само розв'язок спрощення логічних виразів. Єдиним доведенням достовірності є емпірична верифікація результату спрощення функцій. Проблема спрощення булевих виразів абстрактним способом стає само розв'язною (рис. 2)!



Рис. 2. Застосування дистрибутивного закону, як бази для абстрактного методу спрощення булевих функцій та само розв'язку булевих задач

Ілюстрація на рис. 2 демонструє, що дистрибутивний закон не лише є історично важливий, а й стає мостом до нової логіки розв'язку – від абстрактного спрощення функцій до автоматичного само розв'язку булевих задач у контексті AI та обчислювальної логіки.

Синтез трьох рівнів: закон (формальна основа), абстракція (узагальнення і спрощення), само розв'язок (автономне мислення) разом утворюють логічну еволюцію, де дистрибутивний закон переходить від площини формул до сфери самостійного розуміння системою.

Література

1. S. Sapra; M. Theobald; E. Clarke SAT-based algorithms for logic minimization / Proceedings 21st International Conference on Computer Design. 13-15 October 2003. San Jose, CA, USA. – DOI: 10.1109/ICCD.2003.1240948. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1240948>.
2. Ana Petkovska. Exploiting Satisfiability Solvers for Efficient Logic Synthesis / Doctoral program in computer science and communications for the degree of doctor of science. – presented on september 25, 2017. URL: <https://surl.li/fwjmwj>
3. Nachum Dershowitz, Ziyad Hanna, Alexander Nadel. A Scalable Algorithm for Minimal Unsatisfiable Core Extraction / Proceedings of the 9th International Conference Theory and Applications of Satisfiability Testing (SAT 2006), Lecture Notes in Computer Science, volume 4121, Springer-Verlag, Berlin, pp. 36-41. URL: <https://arxiv.org/abs/cs/0605085>.
4. Mirhoseini, A., Goldie, A., Yazgan, M. et al. A graph placement methodology for fast chip design. Nature 594, 207–212 (2021). <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03544-w>. URL: <https://surl.li/yhrngn>
5. Weiming Xiang , Patrick Musau , Ayana A. Wild. Verification for Machine Learning, Autonomy, and Neural Networks Survey // arXiv:1810.01989. - Wed, 3 Oct 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1810.01989>.

6. Буняк, А. Електроніка та мікросхемотехніка [Электронный ресурс] / А. Буняк – Київ: Вид. «Астон», 2001. – 385 с. – URL: <https://surl.li/dolpnm>.
7. Мінзюк, В. Метод мінімізації булевих функцій для проектування цифрових комбінаційних схем // Information and communication technologies, electronic engineering, Vol. 3, No. 1, pp. 146–152 (2023), <https://doi.org/10.23939/ict2023.01.146>. URL: <http://surl.li/nbkhss>
8. Mykhailo Solomko, Petro Tadeyev, Mykola Antoniuk, Yuliia Mala, Stepaniia Babych, Yakiv Ivashchuk. Implementation of a non-standard system for simplifying Peirce-Webb functions // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – Vol. 5, No 4 (131). 2024. – pp 6 – 32. DOI: 10.15587/1729-4061.2024.312968. URL: <https://journals.urau.ua/eejet/issue/view/18463>.
9. Бур'ян С.О., Землянухіна Г.Ю. Синтез логічних схем / Навчальний посібник. – Київ. - КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 61 с. URL: ela.kpi.ua/handle/123456789/48564.
10. Shannon decomposition / Binary algebra. URL: <https://learn.circuitverse.org/docs/binary-algebra/shannon.html>.
11. Різник В.В., Соломко М.Т. Застосування алгебричної операції супер-склеювання змінних для мінімізації булевих функцій комбінаторним методом // Технологічний аудит та резерви виробництва. – Вип. 6/2 (38), 2017. ст. 60 – 76.
12. 3. Solomko M. Developing an algorithm to minimize boolean functions for the visual-matrix form of the analytical method // Eastern – European Journal of Enterprise Technologies. – Vol. 1, No 4(109). 2021. – pp. 6–21. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.225325>. URL: <https://surl.li/pfcuer> (дата звернення: 20. 08. 2025).

РЕЗОЛЮЦІЯ
XXVI Міжнародного науково-практичного семінару
"КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ ТА ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ"
присвяченого пам'яті професора Донця Г.П.

Учасники XXVIII Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їхні застосування», організованого за підтримки Міністерства освіти і науки України, Центральноукраїнським національним технічним університетом (кафедра вищої математики та фізики), Інститутом кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Національним університетом «Запорізька політехніка» (кафедра системного аналізу та обчислювальної математики), представили 33 українських та закордонних вищих навчальних закладів та академічних інститутів, 1 науково-виробничого підприємства та 3 громадських організацій, зокрема

Установи України

Державний науково-дослідний інститут випробувань і сертифікації озброєння та військової техніки

Дніпровський національний університет імені О.Гончара
Донбаська державна машинобудівна академія (м. Тернопіль)

Економіко-технологічний інститут імені Роберта Ельворті
Запорізький національний університет

Інститут енергетичних машин і систем імені А.М. Підгорного НАН України

Інститут інформаційних технологій та систем НАН України

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

Інститут технічної механіки НАН України та ДКА України

КЗ «Запорізький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти»
ЗОР

Київський Національний Економічний Університет ім. В. Гетьмана

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Міжнародний європейський університет

Національний Державний університет «Київський авіаційний інститут»

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Національний університет «Запорізька політехніка»

Національний університет «Львівська політехніка»

ПАТ «Науково-виробниче підприємство «Радій», м. Кропивницький

Ужгородський національний університет

Українська державна льотна академія

Харківський національний університет міського господарства імені О.Бекетова

Центральноукраїнський національний технічний університет

Черкаський державний технологічний університет

Закордонні установи

Варшавський університет (Польща)

Інститут математики Лодзького політехнічного університету (Польща)

Мадридський політехнічний університет (Іспанія)

Самаркандський філіал Ташкентського університету інформаційних технологій (Узбекистан)

Університет Гронінгена (Нідерланди)

Університет Кардіффу (Велика Британія)

Університет Сент-Ендрюс (Шотландія)

Школи інформатики, Інститут поведінкових і нейронаук, Центр міждисциплінарних досліджень з обчислювальної алгебри (GAP Center) (Шотландія)

Університет Стоні-Брук (США)

Університет Турку (Фінляндія)

Громадські організації

Міжнародний дослідницький центр вихрової енергетики

Системні дослідження

Українське фізичне товариство

Учасники семінару розглядали питання, пов'язані з теорією графів; методами комбінаторної, лінійної та векторної оптимізації й теорією прийняття рішень; математичним моделюванням динамічних систем, мереж Петрі та дискретних процесів; аналізом і моделюванням енергетичних, економічних і фінансових мереж, ланцюгів поставок та систем паралельних обчислень; застосуванням штучного інтелекту, нечіткої логіки, логіко-лінгвістичних методів та обробки великих даних; задачами авіації, планування повітряних коридорів та оптимізації місій груп БПЛА; кібербезпекою, функціональною стійкістю програмних комплексів та GPU-прискоренням алгоритмів; а також екологічним моніторингом, захистом критичної інфраструктури та прикладними дослідженнями в галузі робототехніки і комп'ютерного зору.

Обговорення велося за такими напрямками:

1. *Комбінаторні конфігурації, графи та задачі оптимізації на них.*
2. *Автомати, скінченні алгебри, математична логіка, теорія множин, теорія ігор, теорія прийняття рішень, кодування, розпізнавання образів та їхнє застосування в різних галузях.*
3. *Математичні моделі дискретних процесів т систем різного призначення.*
4. *Програмне забезпечення синтезу та аналізу комбінаторних конфігурацій.*
5. *Графи знань, онтології, машинне навчання, графові бази даних, штучний інтелект.*

Проблематика конференції привернула до себе увагу фахівців із різних галузей знань. У науковому заході взяли участь 100 учасників, серед яких: 30 докторів наук (фізико-математичних – 15, технічних – 10,

педагогічних – 2, економічних – 1, геологічних – 1, філологічних – 1); 46 кандидатів наук (фізико-математичних – 26, технічних – 17, педагогічних – 1; економічних – 1); 9 викладачів та науковців без наукового ступеня; 15 аспірантів і здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти.

Усвідомлюючи роль і значення розвитку фундаментальних і прикладних досліджень в галузях науки, де широко використовуються комбінаторні конфігурації, учасники конференції вважають за необхідне:

1. Продовжити наукові дослідження за обраними напрямками, враховуючи зростаючу актуальність цієї тематики. Відзначивши високу ефективність дистанційної форми проведення XXVIII Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їхні застосування», рекомендувати в майбутньому поєднувати дистанційну форму роботи семінару разом з традиційною очною присутністю (за можливістю).

2. Розвивати наукові зв'язки з вітчизняними та закордонними провідними вищими навчальними закладами, науковими установами, для організації і реалізації спільних наукових та освітніх проєктів.

3. Підтримувати залучення молоді до участі в семінарі.

4. Рекомендувати кращі доповіді семінару до публікації в збірниках наукових праць установ організаторів семінару.

5. Розмістити інформацію про проведений семінар та опублікувати резолюцію конференції і збірник матеріалів на сайтах Центральноукраїнського національного технічного університету, Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України та Національного університету «Запорізька політехніка».

6. Поширювати інформацію про результати семінару у спеціалізованих виданнях.

заступник голови організаційного комітету
зав. кафедри вищої математики та фізики ЦНТУ

С.М.Якименко

Матеріали
XXVIII Міжнародного науково-практичного семінару
"КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ ТА ЇХНІ
ЗАСТОСУВАННЯ"
7-9 травня 2026 року

Редакційна колегія не несе відповідальності за матеріали,
опубліковані в збірнику. Усі вони подані в авторській редакції та
виражають персональну позицію учасників семінару

Підписано до друку 27.05.2026 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. 13,0
Наклад 300 прим. Зам. №0721

Приватне підприємство «Ексклюзив-Систем»
Свідоцтво держ. реєстру ДК№4470 від 17.01.2013р.
25006, м. Кропивницький, вул. Шевченка, 25
тел. 050-92-20913